CALCOLO NUMERICO 1 (21 Novembre 2013) - Prima prova in itinere

1) Assegnato un parametro reale $a > 0$, calcolare il numero di condizionamento $K_{f_a}(x)$ della funzione

$$f_a(x) = x\sqrt{x-a}$$

e stabilire, in funzione di a, per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_{f_a}(x) < 10$.

2) Si consideri il polinomio di secondo grado p_2 che interpoli una funzione $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ nei punti $\{-a, 0, a\}$, con parametro $a \in (0,1]$.

2.1) Trovare una maggiorazione dell'errore $\max_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - p_2(x)|$ nel caso in cui $a = 1$ ed $f(x) = e^{-2x^2}$.

2.2) Trovare il valore di a che rende minima la quantità

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |(x-a)x(x+a)|.$$

3) Stimare il numero minimo di intervalli di uguale ampiezza in cui suddividere l'intervallo $[0,5]$, affinchè l'errore che si commette interpolando con una spline lineare la funzione $f(x) = 1/(1+e^x)$ sia minore di 10^{-2}.

4) Data la formula di quadratura numerica

$$I = \int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx h[\omega_1 f(-\alpha h) + \omega_2 f(0) + \omega_1 f(\alpha h)], \quad 0 < \alpha < 1, \; h > 0$$

4.1) trovare ω_1 e ω_2 in funzione di α in modo tale che la formula abbia grado di precisione almeno 3.

4.2) Esistono valori di ω_1, ω_2, α per i quali il grado di precisione sia maggiore di 3?

5) Si consideri una formula di quadratura interpolatoria di tipo Gaussiano con $n \geq 1$ nodi, $\tilde{I} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$, si dimostri che i pesi α_i sono non negativi. *[Suggerimento: utilizzare come funzione f da integrare un opportuno polinomio con integrale non negativo per cui la formula risulti esatta]*