CALCOLO NUMERICO 1 (20 Novembre 2014) - Prima prova in itinere
GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

M1 1^ itinere
20-11-2014

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$$

e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 100$.

C.E. $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-\sqrt{1-x^2} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \geq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \cancel{1}-x^2 \leq \cancel{1} \ \forall x \end{cases}$

$K_f(x) = \left| \dfrac{x f'(x)}{f(x)} \right|$ C.E. $-1<x<1 \ \wedge \ x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} \cdot \frac{-1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) = \frac{x}{2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}}$$

$$K_f(x) = \left| \frac{x \dfrac{x}{2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} \right| = \left| \frac{x^2}{2(1-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2})} \right| =$$

$$\frac{x^2}{2(\sqrt{1-x^2}-1+x^2)} < 100$$

si può osservare qui che i due fattori sono >0 (vedi C.E.), oppure

Denominatore: $\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2 > 0 \quad \sqrt{1-x^2} > 1 - x^2$

$1-x^2 = t \quad 0 < t < 1 \quad \sqrt{t} > t \quad t > t^2 \quad t^2 - t < 0 \quad t(t-1) < 0$

Disequazione: $x^2 < 200(\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2)$

$x^2 < 200\sqrt{1-x^2} - 200 + 200x^2$

$\underbrace{200 - 199x^2}_{>0} < 200\sqrt{1-x^2}$

$\cancel{40000} - 79600x^2 + 39601x^4 < \cancel{40000} - 40000x^2$

$39601x^4 - 39600x^2 < 0$

$x^2(39601x^2 - 39600) < 0$

$$\boxed{-\sqrt{\frac{39600}{39601}} < x < \sqrt{\frac{39600}{39601}} \approx 0.9999873 \qquad x \neq 0}$$

2) Si considerino le funzioni di n

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k \in \mathbb{P}_2, \quad \text{e} \quad g(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 \in \mathbb{P}_4.$$

2.1) Dopo aver calcolato $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$, si ricavi l'espressione del polinomio $f(n)$ mediante il metodo di interpolazione delle differenze divise a partire dai valori $(1, f(1))$, $(2, f(2))$ e $(3, f(3))$.

2.2) Verificare che per $n = 1, 2, 3, 4, 5$ si ha $[f(n)]^2 = g(n)$.

2.3) Dire se $g(n) = [f(n)]^2$ $\forall n \geq 1$ giustificando la risposta data.

M1 1^ Ateneo

20-11-2014

$f(1) = \sum_{k=1}^{1} k = 1$; $f(2) = \sum_{k=1}^{2} k = 1+2=3$; $f(3) = \sum_{k=1}^{3} k = 1+2+3=6$

$(1;1)$ $(2;3)$ $(3;6)$

2.1) Metodo delle differenze divise:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ 2 & 3 & & \frac{1}{2} & \\ & & 3 & & \\ 3 & 6 & & & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(n) = 1 + 2(n-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) =$$

$$= 1 + 2n - 2 + \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2) =$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.2)

$f(4) = 6+4=10$; $f(5) = 10+5=15$

$[f(1)]^2 = 1$; $[f(2)]^2 = 9$; $[f(3)]^2 = 36$; $[f(4)]^2 = 100$; $[f(5)]^2 = 225$.

$g(1) = 1$; $g(2) = 1+8=9$; $g(3) = 9+27=36$; $g(4) = 36+64=100$;

$g(5) = 100+125 = 225$

$f \in \mathbb{P}_2 \Rightarrow f^2 \in \mathbb{P}_4$

$g \in \mathbb{P}_4$

$[f(n)]^2 = g(n)$ per $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Due polinomi di grado 4 che coincidono in 5 punti, coincidono ovunque. $\Rightarrow [f(n)]^2 = g(n)$ $\forall n$.

3) Si costruisca la spline lineare che interpola la funzione $f(x) = x^2e^{-x}$, nei punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.
Si stimi il numero di sottointervalli di uguale ampiezza in cui suddividere l'intervallo $[0, 3]$ affinché l'errore commesso in norma infinito interpolando tale funzione con una spline lineare sia minore di 10^{-4}.

MI 1^ itinere

20-11-2014

x_i	0	1	2	3
y_i	0	$\frac{1}{e}$	$\frac{4}{e^2}$	$\frac{9}{e^3}$

$$S_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}(x) & 0 \leq x < 1 \\ \left(\frac{4}{e^2} - \frac{1}{e}\right)(x-1) + \frac{1}{e} & 1 \leq x < 2 \\ \left(\frac{9}{e^3} - \frac{4}{e^2}\right)(x-2) + \frac{4}{e^2} & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\max_{0 \leq x \leq 3} |f(x) - S_1(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \underbrace{\max_{0 \leq t \leq 3} |f''(t)|}_{M}$$

$$h = \frac{3}{N}$$

$$f'(t) = 2te^{-t} + t^2(-e^{-t}) = e^{-t}(2t - t^2)$$

$$f''(t) = -e^{-t}(2t - t^2) + e^{-t}(2 - 2t) = e^{-t}(t^2 - 4t + 2)$$

Trovo $\max_{0 \leq t \leq 3} |f''(t)| \Rightarrow f'''(t) = -e^{-t}(t^2 - 4t + 2) + e^{-t}(+2t - 4)$

$$= e^{-t}(-t^2 + 6t - 6) \geq 0$$

$$t^2 - 6t + 6 \leq 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 9 - 6 = 3$$

$$t_1 = 3 - \sqrt{3} \qquad t_2 = 3 + \sqrt{3}$$

	0		$3-\sqrt{3}$		3
f'''		$-$		$+$	
f''		$\searrow$		$\nearrow$	

$f''(0) = 2$

$f''(3-\sqrt{3}) \cong -0,4120$

$f''(3) \cong -0,0498$

$\longrightarrow$ M=2

$$\frac{1}{\cancel{8}_{4}} \cdot \frac{9}{N^2} \cdot \cancel{2} < 10^{-4} \qquad N^2 > 22500 \qquad N > 150 \qquad \bar{N} = 151$$

4) Assegnato $a > 0$, trovare ω_1, ω_2 e ω_3 in modo tale che la formula di quadratura,

$$I(f) = \int_{-a}^{a} f(x)dx \simeq \omega_1 f\left(-\frac{2}{3}a\right) + \omega_2 f(0) + \omega_3 f\left(\frac{2}{3}a\right) = \tilde{I}(f)$$

abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta? Applicare la formula ottenuta al calcolo dell'integrale definito

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

e calcolare l'errore commesso.

Scrivere la formula composita dedotta dalla formula $\tilde{I}(f)$ nel caso di $M = 2$ sottointervalli di uguale ampiezza.

M1 20-11-2014

1^ itinere

- $r=0$ $f(x)=1$

$\int_{-a}^{a} 1\,dx = 2a$ $\qquad \omega_1+\omega_2+\omega_3=2a$

- $r=1$ $f(x)=x$

$\int_{-a}^{a} x\,dx = 0$ $\qquad -\frac{2}{3}a\,\omega_1+\frac{2}{3}a\,\omega_3=0 \Rightarrow \omega_1=\omega_3$

$\Downarrow$

- $r=2$ $f(x)=x^2$

$\int_{-a}^{a} x^2 dx = \frac{2}{3}a^3$ $\qquad \frac{4}{9}a^2\omega_1+\frac{4}{9}a^2\omega_3=\frac{2}{3}a^3 \Rightarrow \frac{8}{9}\omega_1=\frac{2}{3}a$

$\Downarrow$

$\omega_1=\frac{3}{4}a$

$\Downarrow$

$\omega_3=\frac{3}{4}a$

$\omega_2 = 2a-2\left(\frac{3}{4}a\right)=\frac{a}{2}$

[vera $\forall f(x)=x^{2k+1}$, $k\in\mathbb{N}$]

- $r=3$ $f(x)=x^3$

$\int_{-a}^{a} x^3 dx = 0$ $\qquad \frac{3}{4}a\left(-\frac{2}{3}a\right)^3+\frac{3}{4}a\left(\frac{2}{3}a\right)^3=0$

- $r=4$ $f(x)=x^4$

$\int_{-a}^{a} x^4 dx = \frac{2}{5}a^5$ $\qquad \frac{3a}{4}\left(-\frac{2}{3}a\right)^4+\frac{3}{4}a\left(-\frac{2}{3}a\right)^4 = 2\cdot\frac{3}{4}a\cdot\frac{16}{81}a^4=\frac{8}{27}a^5 \neq \frac{2}{5}a^5$

$\Rightarrow$ G.P. $r=3$

Applicazione della formula a:

$$I(f)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos x \; dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} = 2$$

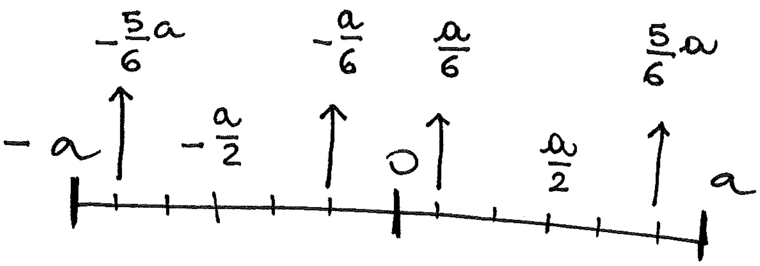
$a = \frac{\pi}{2}$

$$\tilde{I}(f) = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} f\left(-\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} f(0) + \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} f\left(\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\right) =$$

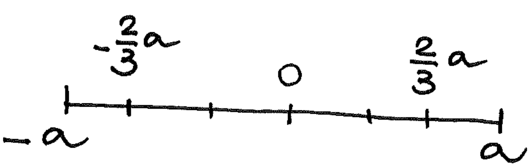
$$2\cdot\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{(3+2)\pi}{8} \simeq 1,9635$$

ERR = 0.0365

Formula Composita:



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = (*)$$



a = semiintervallo

$w_1 = \frac{3}{4}a$

$w_2 = \frac{a}{2}$

$w_3 = \frac{3}{4}a$

$$(*)\quad \frac{3}{4}\cdot\frac{a}{2} f\left(-\frac{5}{6}a\right) + \frac{a}{4} f\left(-\frac{a}{2}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{a}{2} f\left(-\frac{a}{6}\right) +$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{a}{2} f\left(\frac{a}{6}\right) + \frac{a}{4} f\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{3}{4}\,\frac{a}{2} f\left(\frac{5}{6}a\right) =$$

$$\frac{3}{8}a\left[f\left(-\frac{5}{6}a\right) + f\left(-\frac{a}{6}\right) + f\left(\frac{a}{6}\right) + f\left(\frac{5}{6}a\right)\right] +$$

$$\frac{a}{4}\left[f\left(-\frac{a}{2}\right) + f\left(\frac{a}{2}\right)\right]$$