

CALCOLO NUMERICO 1 (20 Novembre 2014) - Prima prova in itinere
GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

- 1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$$

e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 100$.

- 2) Si considerino le funzioni del parametro intero $n \geq 1$,

$$f(n) = \sum_{k=1}^n k, \quad e \quad g(n) = \sum_{k=1}^n k^3.$$

Esistono due polinomi $p(x) \in \mathbb{P}_2$, e $q(x) \in \mathbb{P}_4$, tali che $p(n) = f(n)$, $q(n) = g(n)$, per ogni valore del parametro n .

- 2.1) Dopo aver calcolato $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$, si ricavi l'espressione del polinomio $p(x)$ mediante il metodo di interpolazione delle differenze divise a partire dai valori $(1, f(1))$, $(2, f(2))$ e $(3, f(3))$.
- 2.2) Verificare che per $n = 1, 2, 3, 4, 5$ si ha $[p(n)]^2 = g(n)$.
- 2.3) Dire se $g(n) = [p(n)]^2 \forall n \geq 1$ giustificando la risposta data.

- 3) Si costruisca la spline lineare che interpola la funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$, nei punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Si stimi il numero di sottointervalli di uguale ampiezza in cui suddividere l'intervallo $[0, 3]$ affinché l'errore commesso in norma infinito interpolando tale funzione con una spline lineare sia minore di 10^{-4} .

- 4) Assegnato $a > 0$, trovare ω_1 , ω_2 e ω_3 in modo tale che la formula di quadratura,

$$I(f) = \int_{-a}^a f(x) dx \simeq \omega_1 f\left(-\frac{2}{3}a\right) + \omega_2 f(0) + \omega_3 f\left(\frac{2}{3}a\right) = \tilde{I}(f)$$

abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta? Applicare la formula ottenuta al calcolo dell'integrale definito

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

e calcolare l'errore commesso.

Scrivere la formula composita dedotta dalla formula $\tilde{I}(f)$ nel caso di $M = 2$ sottointervalli di uguale ampiezza.

- 5) Sia $s_2(x)$ una spline quadratica interpolante una funzione $f \in C^2[a, b]$ negli $(n + 1)$ punti $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. La funzione $g(x) = s_2'(x)$ è una funzione spline lineare? La funzione g interpola la funzione f' negli stessi punti x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ della suddivisione?