CALCOLO NUMERICO 1 (17 Novembre 2015)
PRIMA PROVA IN ITINERE

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Calcolare in funzione di $\alpha > 0$ il numero di condizionamento $K_{\alpha,f}(x)$ di $f(x) = x^2 + \alpha x$, e trovare per quali $x \in \mathbb{R}$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_{\alpha,f}(x) < 1$.

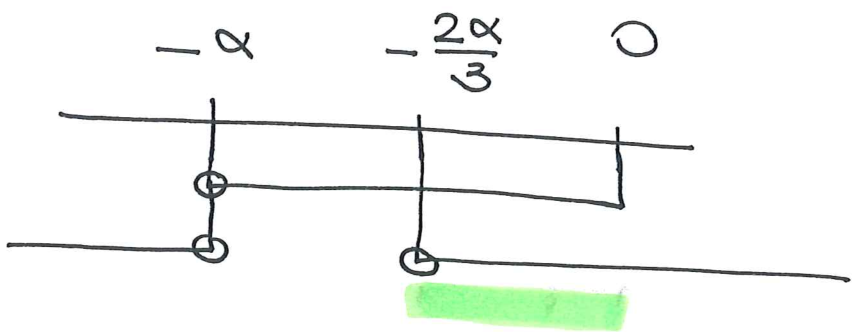
$$K_{\alpha f}(x) = \left| \frac{x\, f'(x)}{f(x)} \right| \qquad \text{C.E.} \quad x \neq 0, \quad x \neq -\alpha$$

$$f'(x) = 2x + \alpha$$

$$K_{\alpha, f}(x) = \left| \frac{x(2x+\alpha)}{x^2+\alpha x} \right| = \left| \frac{\cancel{x}(2x+\alpha)}{\cancel{x}(x+\alpha)} \right| < 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x+\alpha}{x+\alpha} < 1 \\[2ex] \dfrac{2x+\alpha}{x+\alpha} > -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x+\alpha-x-\alpha}{x+\alpha} < 0 \\[2ex] \dfrac{2x+\alpha+x+\alpha}{x+\alpha} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{x+\alpha} < 0 \\[2ex] \dfrac{3x+2\alpha}{x+\alpha} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha < x < 0 \\[2ex] x < -\alpha \ \cup \ x > -\dfrac{2\alpha}{3} \end{cases}$$



$$-\frac{2}{3}\alpha < x < 0$$

2) Sia $f \in \mathbb{P}_3$ e sia $p_2(x) = 2x^2 + 3$ il polinomio di interpolazione di f di grado 2 rispetto ai nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2.1) Sapendo che $f(2) = 0$, si determini l'espressione di $f(x)$.

2.2) Trovare $\max_{x\in[-1,2]} |f(x) - p_2(x)|$ utilizzando le espressioni di f e di p_2, e, successivamente, verificare che tale valore coincide con quello trovato utilizzando il teorema di rappresentazione dell'errore di interpolazione.

1° itinere

17-11-2015

2.1) Dal metodo delle differenze divise

$$f(x) = p_2(x) + (x+1)(x-0)(x-1)\, f[-1,0,1,2]$$

$$\begin{array}{cccccc}
-1 & 5 & & & & \\
 & & -2 & & & \\
0 & 3 & & 2 & & \\
 & & 2 & & \dfrac{-\frac{11}{2}}{3} = -\dfrac{11}{6} & \\
1 & 5 & & -\frac{7}{2} & & \\
 & & -5 & & & \\
2 & 0 & & & &
\end{array}$$

$$f(x) = 2x^2+3 - \frac{11}{6}x(x^2-1) = -\frac{11}{6}x^3 + 2x^2 + \frac{11}{6}x + 3$$

oppure

$$f(x) = 2x^2+3+A\,x\,(x^2-1) \qquad \text{con } f(2)=0$$

$$0 = 8+3+A\cdot 2\cdot 3 \implies A = -\frac{11}{6}$$

2.2) $$f(x) - p_2(x) = -\frac{11}{6}(x^3-x) = e(x)$$

$$e'(x) = -\frac{11}{6}(3x^2-1) = 0 \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\max_{x\in[-1,2]} |e(x)| = \max\left\{ \left|e\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|, |e(-1)|, |e(2)| \right\}$$

$$= \max\left\{ \frac{11}{9\sqrt{3}} ; 0 ; 11 \right\} = 11$$

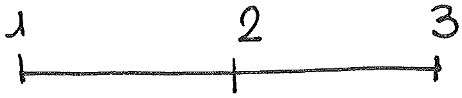
Teorema di rappresentazione dell'errore

$$E(x) = \frac{1}{3!}(x+1)x(x-1)\underbrace{f'''(t_x)}_{-11} = -\frac{11}{6}(x^3-x) = e(x)$$

3) Determinare la funzione $S(x)$ spline naturale cubica su $[1,3]$ interpolante nei punti $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$.

1° itinere

17-11-2015



$a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3$

$A+B(x-2)+C(x-2)^2+D(x-2)^3$

$$S'(x)=\begin{cases} b+2c(x-1)+3d(x-1)^2 & 1\leq x<2 \\ B+2C(x-2)+3D(x-2)^2 & 2\leq x\leq 3\end{cases}$$

$$S''(x)=\begin{cases} 2c+6d(x-1) & 1\leq x<2 \\ 2C+6D(x-2) & 2\leq x\leq 3\end{cases}$$

Condizioni di interpolazione

$S(1)=2 \qquad a=2$

$S(2)=3 \qquad A=3$

$S(3)=5 \qquad A+B+C+D=5$

Condizioni di naturalità

$S''(1)=0 \qquad 2c=0 \qquad c=0$

$S''(3)=0 \qquad 2C+6D=0 \qquad C=-3D$

Condizioni C^0, C^1, C^2

C^0: $\quad a+b+c+d=A$

C^1: $\quad b+2c+3d=B$

C^2: $\quad 2c+6d=2C \qquad c+3d=C$

$$\begin{cases} a = 2 \\ A = 3 \\ c = 0 \\ 3 + B + C + D = 5 \\ C = -3D \\ 2 + b + 0 + d = 3 \end{cases}$$

$$b + 2\cdot 0 + 3\cdot d = B$$

$$0 + 3\cdot d = C$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ B + C + D = 2 \\ C = -3D \\ b + d = 1 \\ b + 3d = B \\ 3d = C \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -D \Rightarrow D = -d \\ B = b + 3d \\ C = 3d \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ b + 3d + 3d - d = 2 \\ b + d = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{---} \\ b + 5d = 2 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

$$2 - 5d = 1 - d$$

$$d = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

$$a = 2 \qquad b = \frac{3}{4} \qquad c = 0 \qquad d = \frac{1}{4}$$

$$A = 3 \qquad B = \frac{3}{2} \qquad C = +\frac{3}{4} \qquad D = -\frac{1}{4}$$

$$S(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^3 & 1 \leq x < 2 \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

4) Si consideri la seguente formula di quadratura numerica per l'approssimazione dell'integrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$,

$$\overline{I}(f) = \alpha_1 f(-1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(1),$$

con $x_2 \in (-1, 1)$, α_1, α_2, α_3 pesi della formula.

4.1) Determinare i valori dei parametri reali x_2, α_1, α_2, α_3, in modo tale che la formula abbia grado di precisione polinomiale massimo.

4.2) La formula ottenuta è una formula Gaussiana?

1° itinere

17-11-2015

- $r=0 \quad f(x)=1$

$\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2$

- $r=1 \quad f(x)=x$

$\int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \qquad -\alpha_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3=0$

- $r=2 \quad f(x)=x^2$

$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \qquad \alpha_1+\alpha_2 x_2^2+\alpha_3=\frac{2}{3}$

- $r=3 \quad f(x)=x^3$

$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \qquad -\alpha_1+\alpha_2 x_2^3+\alpha_3=0$

Per sottrazione:

$\alpha_2(x_2^3-x_2)=0$

Escludendo $\alpha_2=0$:

$\boxed{x_2=0}$

$x_2=\pm 1$ NO perchè ± 1 sono già nodi della F.Q.

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2 \\ -\alpha_1+\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha_3=\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \alpha_1+\alpha_3=\frac{1}{3}$$

$\alpha_2 = 2-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \overline{I}(f)=\frac{1}{3}f(-1)+\frac{4}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)$

G.P. 4? $r=4 \quad f(x)=x^4$

$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \qquad \overline{I}(x^4)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\neq\frac{2}{5}$

Non è una formula Gaussiana (4 d.o.f)

5) Sia assegnata una funzione $f \in C^1([0,1])$, determinare per quali valori del parametro $\beta \in [0,1]$ esiste ed è unico il polinomio $p \in \mathbb{P}_2$ che soddisfi le seguenti condizioni

$$p(0) = f(0),\ p(1) = f(1),\ p'(\beta) = f'(\beta).$$

1° itinere

17-11-2015

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

$$p'(x) = b + 2cx$$

$$p(0): \quad a = f(0)$$

$$p(1): \quad a + b + c = f(1)$$

$$p'(\beta): \quad b + 2c\beta = f'(\beta)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2\beta \end{bmatrix}}_{\det A \neq 0} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f'(\beta) \end{bmatrix} \qquad A\underline{x} = \underline{f}$$

$$2\beta - 1 \neq 0 \qquad \beta \neq \frac{1}{2}$$