CALCOLO NUMERICO 1 (17 Novembre 2015)
PRIMA PROVA IN ITINERE

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Calcolare in funzione di $\alpha > 0$ il numero di condizionamento $K_{\alpha,f}(x)$ di $f(x) = x^2 + \alpha x$, e trovare per quali $x \in \mathbb{R}$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_{\alpha,f}(x) < 1$.

2) Sia $f \in \mathbb{P}_3$ e sia $p_2(x) = 2x^2 + 3$ il polinomio di interpolazione di f di grado 2 rispetto ai nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2.1) Sapendo che $f(2) = 0$, si determini l'espressione di $f(x)$.

2.2) Trovare $\max_{x\in[-1,2]} |f(x) - p_2(x)|$ utilizzando le espressioni di f e di p_2, e, successivamente, verificare che tale valore coincide con quello trovato utilizzando il teorema di rappresentazione dell'errore di interpolazione.

3) Determinare la funzione $S(x)$ spline naturale cubica su $[1, 3]$ interpolante nei punti $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$.

4) Si consideri la seguente formula di quadratura numerica per l'approssimazione dell'integrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$,

$$\overline{I}(f) = \alpha_1 f(-1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(1),$$

con $x_2 \in (-1, 1)$, α_1, α_2, $\alpha_3 \neq 0$ pesi della formula.

4.1) Determinare i valori dei parametri reali x_2, α_1, α_2, α_3, in modo tale che la formula abbia grado di precisione polinomiale massimo.

4.2) La formula ottenuta è una formula Gaussiana?

5) Sia assegnata una funzione $f \in C^1([0, 1])$. Determinare per quali valori del parametro $\beta \in [0, 1]$ esiste ed è unico il polinomio $p \in \mathbb{P}_2$ che soddisfi le seguenti condizioni

$$p(0) = f(0),\ p(1) = f(1),\ p'(\beta) = f'(\beta).$$