1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ di

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

e verificare che $\forall x \in [0, 10]$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

MILANO

1^ itinere

21/11/2016

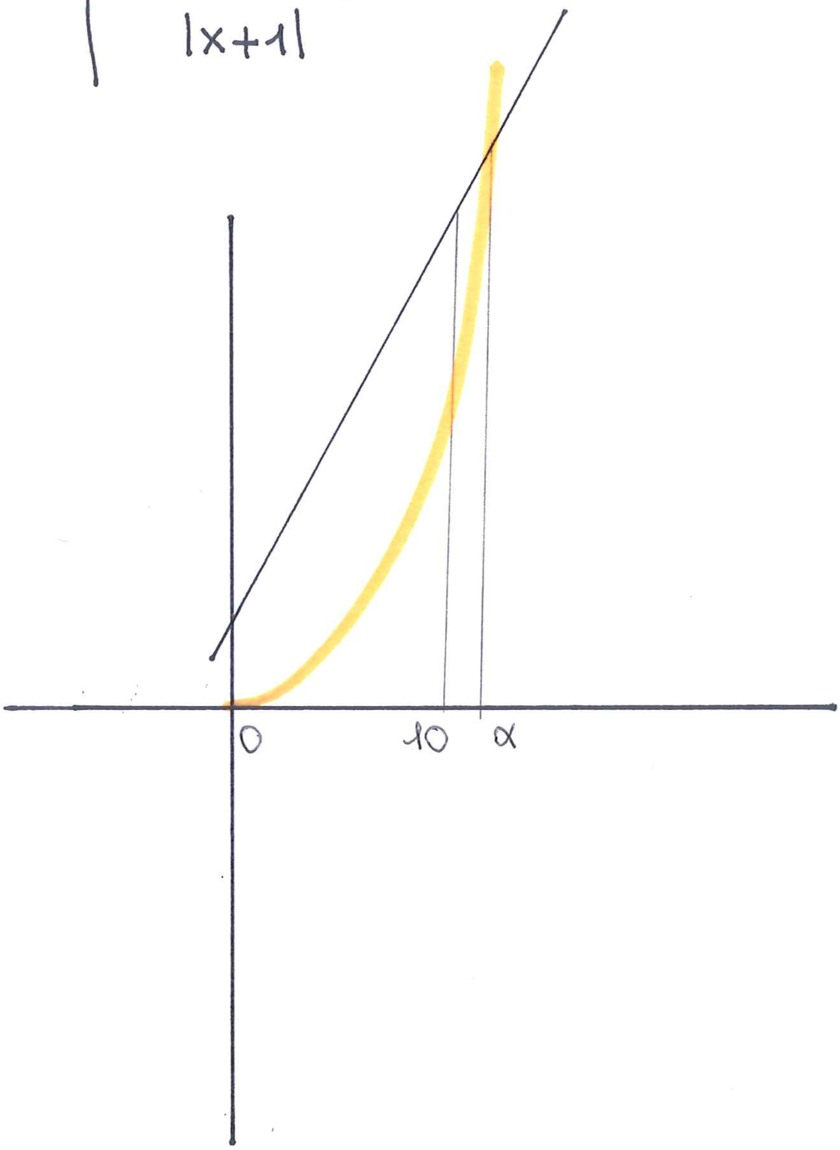
$$f(x) = \frac{e^x}{x+1} \qquad K_f(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x \cdot x}{(x+1)^2}$$

$$K_f(x) = \left| \frac{\frac{e^x \cdot x^2}{(x+1)^2}}{\frac{e^x}{(x+1)}} \right| = \frac{x^2}{|x+1|} < 10$$

$x \in [0, 10]$

x	$x^2 < 10x + 10$
0	$0 < 10$
10	$100 < 110$



In particolare:

$K_f(x) < 10, \; 0 < x < \alpha$

$\alpha > 10$

2) Data la funzione $f(x) = \sin^2 x$ e i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$ costruire il polinomio $p_2 \in \mathbb{P}_2$ che interpola f nei nodi dati.

Sia poi $p_n \in \mathbb{P}_n$ il polinomio che interpola f in $n+1$ nodi equispaziati dell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f(x) - p_n(x)|.$$

MILANO

21/11/2016

1^ itinere

$f(x) = \sin^2 x$

x_i	0	$\pi/6$	$\pi/4$
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Metodo delle differenze divise:

$$\begin{array}{ll} 0 & 0 \\ \frac{\pi}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{\pi} = \frac{3}{2\pi}$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{12}{\pi} = \frac{3}{\pi}$$

$$\frac{\frac{3}{\pi} - \frac{3}{2\pi}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{4}{\pi} = \frac{6}{\pi^2}$$

$$p_2(x) = \frac{3}{2\pi}x + \frac{6}{\pi^2}x\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{6x^2}{\pi^2} + \left(\frac{3}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\right)x = \frac{6}{\pi^2}x^2 + \frac{1}{2\pi}x$$

$$\max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\max_{\bar{x}\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\bar{x}-x_0||\bar{x}-x_1|\dots|\bar{x}-x_n|}_{A} \cdot \underbrace{\max_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f^{n+1}(t)|}_{B}$$

$$A \leq \left(\frac{1}{2}\cdot\pi\right)^{n+1} = \frac{\pi^{n+1}}{2^{n+1}}\ ; \quad f(t) = \sin^2 t \quad f'(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t = \sin 2t$$

$$f''(t) = 2\cos 2t \quad f'''(t) = -4\,\mathrm{sen}\,2t$$

$$\dots\quad f^{(n+1)}(t) = \pm 2^n \mathrm{sen}\,2t \ \vee \dots = \pm 2^n \cos 2t$$

$$B \leq 2^n$$

$$\max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{\pi^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot 2^n = \frac{1}{2}\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

3) Utilizzando la stima classica dell'errore, stimare il numero di sottointervalli M di uguale ampiezza per approssimare l'integrale definito

$$\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$$

con la formula dei trapezi compositi, in modo che l'errore assoluto sia $< 10^{-3}$.

21/11/2016

1^ itinere

MILANO

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f'(x) = -2x\,e^{-x^2} \qquad f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2\left(e^{-x^2}\right) = \left(4x^2-2\right)e^{-x^2}$$

stima classica : $-\frac{1}{12} H^2 (b-a) f''(\eta)$

$$-\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{3}{M}\right)^2(3-0)\,f''(\eta) = -\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{M^2}\,f''(\eta)$$

$$\left|\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{M^2}\cdot\underbrace{(4x^2-2)}_{\substack{|4x^2-2| \\ \leq 34}}\,\underbrace{e^{-x^2}}_{\leq 1}\right| \leq \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{M^2}\cdot 34 = \frac{153}{2}\cdot\frac{1}{M^2} < \frac{1}{1000}$$

$$M^2 > \frac{153000}{2} = 76500 \approx 276.5 \implies M = 277$$

4) Data $f \in C^1([0,2])$, determinare i coefficienti ω_1, ω_2, α_1, α_2 in modo tale che la formula di quadratura:

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f(2) + \alpha_1 f'(0) + \alpha_2 f'(2),$$

sia esatta per polinomi almeno di grado 3. Determinare il grado di precisione della formula ottenuta.

MILANO

21/11/2016

1^ itinere

1) $r=0$

$f(x) = 1 \quad f'(x) = 0$

$\int_0^2 1 dx = 2 \qquad \omega_1 + \omega_2 = 2$

2) $r=1 \quad f(x) = x \quad f'(x) = 1$

$\int_0^2 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2 \qquad 2\omega_2 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2$

3) $r=2 \quad f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$

$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} \qquad 4\omega_2 + 2\cdot 2\alpha_2 = \frac{8}{3}$

$\omega_2 + \alpha_2 = \frac{2}{3}$

4) $r=3 \quad f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$

$\int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 4 \qquad 8\omega_2 + 3\cdot 4\cdot \alpha_2 = 4$

$2\omega_2 + 3\alpha_2 = 1$

$$\begin{cases} \omega_2 + \alpha_2 = \frac{2}{3} \\ 2\omega_2 + 3\alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\omega_2 + 2\alpha_2 = \frac{4}{3} \\ 2\omega_2 + 3\alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$\alpha_2 = -\frac{1}{3}$

$\omega_2 = 1$

$\Rightarrow \omega_1 = 1$;

$\alpha_1 = 2 - 2\omega_2 - \alpha_2 = 2 - 2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$$\int_0^3 f(x)dx \approx f(0) + f(2) + \frac{1}{3}f'(0) - \frac{1}{3}f'(2)$$

GP. $r=4$? $f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3$

$\int_0^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5}$ | FQ: $16 - \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 8 = \frac{16}{3} \neq \frac{32}{5} \Rightarrow GP = 3$

5) Determinare tutte le funzioni $S(x)$ spline quadratiche sull'intervallo $[0,2]$ interpolanti nei punti $(0,-1)$, $(1,0)$, $(2,-1)$. Commentare il risultato ottenuto.

MILANO
21/11/2016
1^ itinere

x_i	0	1	2
y_i	-1	0	-1

$$S(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c & x\in[0,1) \\ d(x-1)^2+e(x-1)+f & x\in[1,2] \end{cases}$$

$$S'(x) = \begin{cases} 2ax+b & x\in[0,1) \\ 2d(x-1)+e & x\in[1,2] \end{cases}$$

Condizioni di interpolazione $\wedge$ $S\in C^0[0,2]$

$S(0)=-1$ $\quad c=-1$

$S(1^-)=0$ $\quad a+b+c=0$

$S(1^+)=$ $\quad f=0$

$S(2)=-1$ $\quad d+e+f=-1$

Condizione $S\in C^1[0,2]$

$S'(1^-)=S'(1^+)$ $\quad 2a+b=e$

$$\begin{cases} c=-1 \\ f=0 \\ \boxed{\begin{matrix} a+b+c=0 & a+b=1 \\ d+e=-1 & \\ 2a+b=e & \end{matrix}} \end{cases}$$

SISTEMA 3x4

$$\begin{cases} a=1-b \\ d=-1-e \\ 2(1-b)+b=e \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1+e-2=e-1 \\ d=-1-e \\ -b=e-2 \Rightarrow b=2-e \end{cases} \qquad e\in\mathbb{R}$$

Le spline quadratiche sono:

$$S(x) = \begin{cases} (k-1)x^2+(2-k)x-1 & x\in[0,1) \\ (-1-k)(x-1)^2+(x-1)k & x\in[1,2] \end{cases}$$

$k\in\mathbb{R}$ arbitrario

$(k=e)$