CALCOLO NUMERICO 1 (21 Novembre 2016)
PRIMA PROVA IN ITINERE

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ di

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

e verificare che $\forall x \in (0, 10]$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

2) Data la funzione $f(x) = \sin^2 x$ e i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$ costruire il polinomio $p_2 \in \mathbb{P}_2$ che interpola f nei nodi dati.

Sia poi $p_n \in \mathbb{P}_n$ il polinomio che interpola f in $n+1$ nodi equispaziati dell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f(x) - p_n(x)|.$$

3) Utilizzando la stima classica dell'errore, stimare il numero di sottointervalli M di uguale ampiezza per approssimare l'integrale definito

$$\int_0^3 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$$

con la formula dei trapezi compositi, in modo che l'errore assoluto sia $< 10^{-3}$.

4) Data $f \in C^1([0, 2])$, determinare i coefficienti $\omega_1,\ \omega_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ in modo tale che la formula di quadratura:

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f(2) + \alpha_1 f'(0) + \alpha_2 f'(2),$$

sia esatta per polinomi almeno di grado 3. Determinare il grado di precisione della formula ottenuta.

5) Determinare tutte le funzioni $S(x)$ spline quadratiche sull'intervallo $[0, 2]$ interpolanti nei punti $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(2, -1)$. Commentare il risultato ottenuto.