1) Data $f_n(x) = \frac{x^n}{4x+1}$, $n \in \mathbb{N}$, per il calcolo degli integrali

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x, \ n = 0, 1, 2, ...,$$

si utilizzi la formula ricorsiva

$$I_n = \frac{1}{4n} - \frac{1}{4} I_{n-1}, \ n \geq 1, \quad I_0 = \frac{1}{4}\ln 5.$$

Dopo aver verificato che la formula proposta è adatta al calcolo degli I_n, $\forall n \geq 1$, si studi la stabilità della formula nel caso in cui il dato I_0 sia noto a meno di una perturbazione ε, cioè sia noto $\tilde{I}_0 = I_0 + \varepsilon$.

Calcolare il numero di condizionamento della funzione f_2 e stabilire se il calcolo di f_2 è ben condizionato nell'intervallo di integrazione, nel senso che il numero di condizionamento risulta minore di 10.

1° itinere 16-11-17
Mate M1

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{4x+1}\,dx = \frac{1}{4}\Big[\ln(4x+1)\Big]_0^1 = \frac{1}{4}\ln 5 \ldots \text{vera per } I_1 \ldots \text{ facile}$$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x+1}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^n}{4x+1}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^n + x^{n-1} - x^{n-1}}{4x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^1 \frac{x^{n-1}\cancel{(4x+1)}}{\cancel{4x+1}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{4x+1}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 - \frac{1}{4} I_{n-1} = \frac{1}{4n} - \frac{1}{4} I_{n-1}$$

$$\tilde{I}_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\tilde{I}_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(I_0 + \varepsilon) = \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} I_0} - \frac{1}{4}\varepsilon = I_1 - \frac{1}{4}\varepsilon$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{1}{4\cdot 2} - \frac{1}{4}\tilde{I}_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\left(I_1 - \frac{1}{4}\varepsilon\right) = \underbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{4} I_1}_{I_2} + \frac{1}{16}\varepsilon$$

$\vdots$

$$\tilde{I}_n = I_n + \frac{(-1)^n}{4^n}\varepsilon \qquad \lim_{n\to\infty} |\tilde{I}_n - I_n| = 0$$

$$\forall \varepsilon \geq 0$$

$$f_2(x) = \frac{x^2}{4x+1}$$

$$K_{f_2}(x) = \left| \frac{x\, f_2'(x)}{f_2(x)} \right|$$

$$f_2'(x) = \frac{2x(4x+1) - x^2 \cdot 4}{(4x+1)^2} = \frac{4x^2 + 2x}{(4x+1)^2}$$

$$K_{f_2}(x) = \left| \frac{\frac{x^2 \cdot (4x+2)}{(4x+1)^2}}{\frac{x^2}{4x+1}} \right| = \frac{4x+2}{4x+1} < 10$$

$x \in (0,1)$ N.B. $4x+1 > 0$

$$4x+2 < 10(4x+1)$$

$$2x+1 < 20x+5$$

$$18x+4 > 0 \qquad \forall x \in (0,1)$$

MI mate 1° itinere 16-11-17

2) Determinare la funzione spline cubica naturale su $[-1,1]$ interpolante nei punti $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$. Discutere il problema dell'interpolazione dei medesimi dati con una spline quadratica.

$$S(x) = \begin{cases} a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d & x \in [-1,0) \\ e x^3 + f x^2 + g x + h & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$S'(x) = \begin{cases} 3a(x+1)^2 + 2b(x+1) + c & x \in [-1,0) \\ 3e x^2 + 2f x + g & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$S''(x) = \begin{cases} 6a(x+1) + 2b & x \in [-1,0) \\ 6ex + 2f & x \in [0,1] \end{cases}$$

Condizioni di interpolasione:

$S(-1)=1 \qquad S(0)=2 \qquad S(1)=0$

$$\left.\begin{array}{l} S(-1)=1 \Rightarrow d=1 \\ S(0)=2 \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=2 \\ h=2 \end{cases} \end{array}\right\} \text{Interpolasione in } x=0 \text{ e } C^0.$$

$S(1) = e+f+g+h=0$

$$\left.\begin{array}{l} S'(0^-) = 3a+2b+c \\ S'(0^+) = g \end{array}\right. \Rightarrow 3a+2b+c=g \qquad C^1$$

$$\left.\begin{array}{l} S''(0^-) = 6a+2b \\ S''(0^+) = 2f \end{array}\right. \Rightarrow 6a+2b=2f \qquad C^2$$

$$\left.\begin{array}{l} S''(-1) = 2b=0 \\ S''(1) = 6e+2f=0 \end{array}\right\} \text{spline cubica naturale}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ d=1 \\ h=2 \\ a+c+1=2 \\ e+f+g+2=0 \\ 3a+c=g \\ 6a=2f \\ 6e+2f=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+c=1 \\ e+f+g=-2 \\ 3a+c=g \\ 3a=f \\ 3e=-f \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{f}{3}+c=1 \\ -\frac{f}{3}+f+g=-2 \\ 3\frac{f}{3}+c=g \\ a=\frac{f}{3} \\ e=-\frac{f}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=1-\frac{f}{3} \\ g=-\frac{2}{3}f-2 \\ f+1-\frac{f}{3}=-\frac{2}{3}f-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=1-\frac{1}{3}\left(-\frac{9}{4}\right)=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4} \\ g=-\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{4}\right)-2=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3}f=-3 \quad \Rightarrow f=-\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$a=\frac{1}{3}\left(-\frac{9}{4}\right)=-\frac{3}{4}$$

$$e=-\frac{1}{3}\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

$$S(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}(x+1)^3+\frac{7}{4}(x+1)+1 & x\in[-1,0) \\ \frac{3}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2 & x\in[0,1] \end{cases}$$

Spline quadratica

$$s(x) = \begin{cases} A(x+1)^2 + B(x+1) + C & x \in [-1, 0) \\ Dx^2 + Ex + F & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$s'(x) = \begin{cases} 2A(x+1) + B & x \in [-1, 0) \\ 2Dx + E & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$s''(x) =$$

$s(-1) = C \qquad C = 1$

$s(0) = \begin{cases} A+B+C = 2 \\ F = 2 \end{cases}$ } Interpolazione in $x=0$ e C^0

$s(1) = D+E+F = 0$

$s'(0^-) = 2A+B$
$s'(0^+) = E$ $\Rightarrow 2A+B = E \qquad C^1$

$$\begin{cases} C = 1 \\ A+B = 1 \\ F = 2 \\ 2A+B = E \\ D+E = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 1 \\ F = 2 \\ A+B = 1 \\ 1-A = E-2A \\ E = -D-2 \end{cases}$$

} $E = A+1$
$E = -D-2$

$A+1 = -D-2$
$A = -D-3$
$B = 1-A = 1+D+3 = D+4$

$$\begin{cases} A \in \mathbb{R} \\ B = D+4 \\ A = -D-3 \\ C = 1 \\ E = -D-2 \\ F = 2 \end{cases} \qquad \infty^1 \text{ soluzioni}$$

3) Si vuole interpolare la funzione $f(x) = e^{2x} + \sin x$, $x \in [0, \pi]$ con una spline lineare S_1 utilizzando nodi equispaziati. Stimare il numero minimo N di nodi affinchè si abbia

$$\max_{0 \le x \le \pi} |f(x) - S_1(x)| < 10^{-3}.$$

Integrando la stessa spline con N nodi sull'intervallo $[0, \pi]$ che formula si ottiene? Stimare l'errore di tale formula di quadratura.

M1 Mate 1° itinere
16-11-17

$$f(x) = e^{2x} + \sin x \qquad x \in [0, \pi]$$

$$\max_{0 \le x \le \pi} |f(x) - S_1(x)| \le \frac{1}{8} h^2 \max_{0 \le t \le \pi} |f''(t)| \qquad h = \frac{\pi}{M}$$

$$f'(t) = 2e^{2t} + \cos t \qquad f''(t) = 4e^{2t} - \sin t$$

$$|f''(t)| \le 4e^{2\pi} + 1 \qquad t \in [0, \pi)$$

(graficamente: $\max_{0 \le t \le \pi} |f''(t)| = f''(\pi) = 4e^{2\pi}$)

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^2}{M^2}\right) \cdot 4e^{2\pi} < 10^{-3} \qquad M^2 > \frac{e^{2\pi} \cdot 1000\, \pi^2}{2} \qquad \overline{M} = 1624$$

2ª parte:

formula di quadratura dei trapezi composita

$$\left| \int_0^\pi f(x)\,dx - I_T^C(f) \right| \le \frac{\pi}{12} \cdot \left(\frac{\pi}{M}\right)^2 \left(4e^{2\pi}\right)$$

4) Data $f \in C^1([-1,1])$, determinare i coefficienti $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, in modo tale che la formula di quadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha f(-1) + \alpha f(1) + \gamma f(0) + \beta[f'(-1) - f'(1)]$$

abbia grado di precisione massimo. Stabilire il grado di precisione della formula ottenuta.

MI Mate 16-11-17 1° itinere

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha f(-1) + \alpha f(1) + \gamma f(0) + \beta\left[f'(-1) - f'(1)\right]$$

- $r=0 \quad f(x)=1 \quad f'(x)=0$

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 \qquad \boxed{\alpha+\alpha+\gamma = 2}$$

- $r=1 \quad f(x)=x \quad f'(x)=1$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \qquad -\alpha+\alpha+\gamma\cdot 0+\beta\cdot(1-1)=0 \quad \forall\, \alpha, \beta\, \gamma$$

- $r=2 \quad f(x)=x^2 \quad f'(x)=2x$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \qquad \alpha(-1)^2+\beta(1)^2+\gamma\cdot(0)^2+\beta\left[2(-1)-2(1)\right]$$

$$2\alpha-4\beta = \frac{2}{3}$$

- $r=3 \quad f(x)=x^3 \quad f'(x)=3x^2$

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \qquad \alpha(-1)^3+\alpha(1)^3+\gamma\cdot 0^3+\beta\left[3(-1)^2-3(1)^2\right]=0$$

$$\forall\, \alpha, \beta, \gamma$$

- $r=4 \quad f(x)=x^4 \quad f'(x)=4x^3$

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \qquad \alpha(-1)^4+\alpha(1)^4+\gamma\cdot 0^4+\beta\left[4(-1)^3-4(1)^3\right]$$

$$2\alpha - 8\beta = \frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \gamma = 2 \\ \alpha - 2\beta = \frac{1}{3} \\ \alpha - 4\beta = \frac{1}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 2\beta + \frac{1}{3} = 4\beta + \frac{1}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 2\beta = \frac{5-3}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = 2 - \frac{14}{15} = \frac{16}{15} \\ \alpha = \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{15} \\ \beta = \frac{1}{15} \end{cases}$$

G.P. $r=5$ Verificato banalmente

G.P. $r=6$ $f(x) = x^6$ $f'(x) = 6x^5$

$$\int_{-1}^{1} x^6 \, dx = \frac{2}{7} \qquad \text{F.Q.}: \frac{7}{15} \cdot 2 + \frac{1}{15}\left[-6-6\right] = \frac{14}{15} - \frac{12}{15} = \frac{2}{15} \neq \frac{2}{7}$$

Il grado di precisione della formula di quadratura è 5