CALCOLO NUMERICO 1 (16 Novembre 2017)
PRIMA PROVA IN ITINERE

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Data $f_n(x) = \frac{x^n}{4x+1}$, $n \in \mathbb{N}$, per il calcolo degli integrali

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x, \ \ n = 0, 1, 2, ...,$$

si utilizzi la formula ricorsiva

$$I_n = \frac{1}{4n} - \frac{1}{4} I_{n-1}, \ \ n \geq 1, \quad I_0 = \frac{1}{4}\ln 5.$$

Dopo aver verificato che la formula proposta è adatta al calcolo degli I_n, $\forall n \geq 1$, si studi la stabilità della formula nel caso in cui il dato I_0 sia noto a meno di una perturbazione ε, cioè sia noto $\tilde{I}_0 = I_0 + \varepsilon$.

Calcolare il numero di condizionamento della funzione f_2 e stabilire se il calcolo di f_2 è ben condizionato nell'intervallo di integrazione, nel senso che il numero di condizionamento risulta minore di 10.

2) Determinare la funzione spline cubica naturale su $[-1, 1]$ interpolante nei punti $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$. Discutere il problema dell'interpolazione dei medesimi dati con una spline quadratica.

3) Si vuole interpolare la funzione $f(x) = e^{2x} + \sin x$, $x \in [0, \pi]$ con una spline lineare S_1 utilizzando nodi equispaziati. Stimare il numero minimo N di nodi affinchè si abbia

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |f(x) - S_1(x)| < 10^{-3}.$$

Integrando la stessa spline con N nodi sull'intervallo $[0, \pi]$ che formula si ottiene? Stimare l'errore di tale formula di quadratura.

4) Data $f \in C^1([-1, 1])$, determinare i coefficienti α, β, γ, in modo tale che la formula di quadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha f(-1) + \alpha f(1) + \gamma f(0) + \beta[f'(-1) - f'(1)]$$

abbia grado di precisione massimo. Stabilire il grado di precisione della formula ottenuta.

5) Siano assegnati $N+1$, $N \geq 2$, valori reali distini $\{x_i\}$, $i = 0, 1, ..., N$, e sia $L_i(x)$ il corrispondente $i-$esimo polinomio di Lagrange. Mostrare se la seguente identità è vera o falsa,

$$\sum_{i=0}^{N} x_i^2 L_i(x) \ = \ x^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$