1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

e stabilire per quali $x \in (1, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ $\quad x \in (1, \infty)$ $\quad K_f(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$K_f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x}{x^2-1}$$

$x \in (1, \infty)$

$$\frac{x}{x^2-1} < 10 \qquad 10x^2 - x - 10 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{401}}{20} \qquad \Rightarrow \quad x > \frac{1+\sqrt{401}}{20}$$

2) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$K_f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

e stabilire per quali $x \in (1, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

2) Determinare se esistono valori dei parametri $a,\ b,\ c,\ d,\ e \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$S(x) = \begin{cases} a(x+1)^3 + b(x+1) + 1 & -1 \le x < 0 \\ cx^3 + dx^2 + e & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

sia una spline cubica naturale sull'intervallo $[-1,1]$.

$$S'(x) = \begin{cases} 3a(x+1)^2 + b & [-1,0) \\ 3cx^2 + 2dx & [0,1] \end{cases} \qquad S''(x) = \begin{cases} 6a(x+1) \\ 6cx + 2d \end{cases}$$

$$* \begin{cases} a+b+1 = e & C^0 \\ 3a+b = 0 & C^1 \\ 6a = 2d & C^2 \\ 6c + 2d = 0 & S''(1)=0 \end{cases} \quad (S''(-1)=0 \ \forall\, a,b,c,d,e)$$

$$\begin{cases} e = a - 3a + 1 = 1 - 2a \\ b = -3a \\ d = 3a \\ c = -\frac{1}{3}d = -\frac{1}{3}\cdot 3a = -a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R} \quad \infty^1 \text{ soluzioni}$$

$$S'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b & [0,1) \\ 3c(x-1)^2 + 2d(x-1) & [1,2] \end{cases} \qquad S''(x) = \begin{cases} 6ax \\ 6c(x-1) + 2d \end{cases}$$

$*$ Idem

2) Determinare se esistono valori dei parametri $a,\ b,\ c,\ d,\ e \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$S(x) = \begin{cases} ax^3 + bx + 1 & 0 \le x < 1 \\ c(x-1)^3 + d(x-1)^2 + e & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

sia una spline cubica naturale sull'intervallo $[0,2]$.

3) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \beta_1 f(-2\alpha) + \beta_2 f(\alpha).$$

Determinare $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta? Si scriva la relativa formula composita associata alla suddivisione dell'intervallo $[-1,1]$ in due sottointervalli di uguale ampiezza.

- $r=0$ $\quad f(x)=1$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \qquad \beta_1+\beta_2=2$

- $r=1$ $\quad f(x)=x$

$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \qquad -2\alpha\beta_1+\alpha\beta_2=0 \qquad \alpha\neq0: \quad \beta_2=2\beta_1$

$\left.\right\} \quad \beta_1=\frac{2}{3} \qquad \beta_2=\frac{4}{3}$

- $r=2$ $\quad f(x)=x^2$

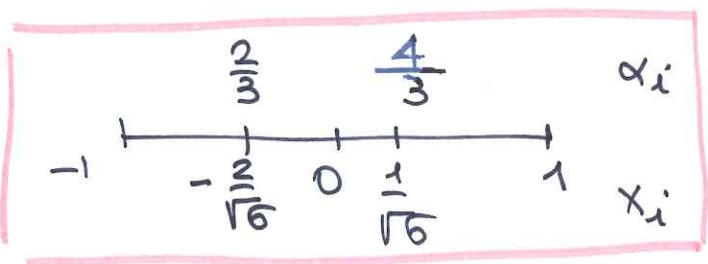
$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \qquad 4\beta_1\alpha^2+\beta_2\alpha^2=\frac{2}{3}$

$\frac{8}{3}\alpha^2+\frac{4}{3}\alpha^2=\frac{2}{3} \qquad 4\alpha^2=\frac{2}{3} \qquad \alpha^2=\frac{1}{6} \qquad \alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$

$[\alpha\in(0,\frac{1}{2})]$

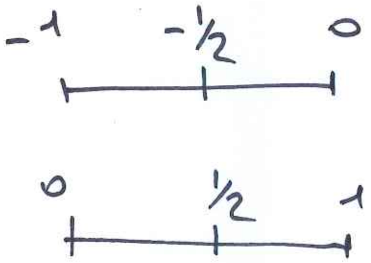
- $r=3$ $\quad f(x)=x^3$ (per trovare il grado di precisione)

$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \qquad \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^3+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 = -\frac{16}{3\cdot6\cdot\sqrt{6}}+\frac{4}{3\cdot6\sqrt{6}} = \frac{4}{3\cdot6\cdot\sqrt{6}}(-4+1) = -\frac{4}{6\sqrt{6}} \neq 0$



G.P. 2

F. composita



$\frac{1}{3}f\left(-\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}f\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\right)+$

$\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\right)$

3) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \alpha_1 f(-\beta) + \alpha_2 f(2\beta).$$

Determinare $\alpha_1, \alpha_1 \in \mathbb{R}^+$ e $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta? Si scriva la relativa formula composita associata alla suddivisione dell'intervallo $[-1, 1]$ in due sottointervalli di uguale ampiezza.

- $r=0 \qquad f(x)=1$

$$\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

- $r=1 \qquad f(x)=x$

$$\int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \qquad -\alpha_1\beta + 2\alpha_2\beta = 0 \qquad \beta \neq 0 : \quad \alpha_1 = 2\alpha_2$$

$$\left.\right\} \quad \alpha_1 = \frac{4}{3} \qquad \alpha_2 = \frac{2}{3}$$

- $r=2 \qquad f(x) = x^2$

$r=2 \qquad f(x) = x^2$

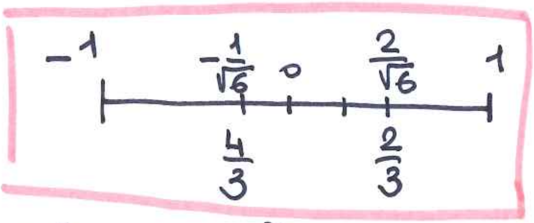
$$\int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{2}{3} \qquad \alpha_1\beta^2 + \alpha_2 \cdot 4\beta^2 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{3}\beta^2 + \frac{8}{3}\beta^2 = \frac{2}{3} \qquad 4\beta^2 = \frac{2}{3} \qquad \beta^2 = \frac{1}{6} \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

- $r=3 \qquad f(x) = x^3$ (per trovare il grado di precisione) $[\beta \in (0, \frac{1}{2})]$

$$\int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0 \qquad \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 = -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{6\sqrt{6}} + \frac{16}{3\cdot 6\sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{6}\cdot 6}\left(-1 + 4\right) =$$

$$\frac{4}{6\sqrt{6}} \neq 0$$



α_i

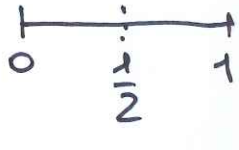
x_i

G.P. = 2

F. Composita

$$\frac{2}{3} f\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot f\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\right) +$$

$$\frac{2}{3} f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\right)$$



4) Costruire il polinomio $p_2 \in \mathbb{P}_2$ che interpola $f(x) = x^4 - 1$ nei nodi $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, $0 < h \leq 1$. Successivamente si rappresenti graficamente la funzione

$$r(h) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p_2(x)|,$$

al variare di $h \in (0, 1]$.

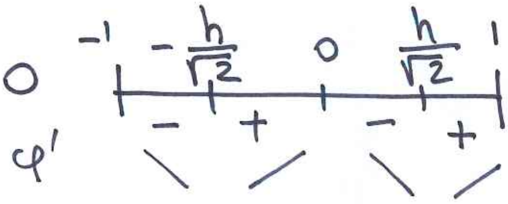
$$\begin{array}{ccccc}
-h & h^4-1 & & & \\
 & & \dfrac{-1-h^4+1}{h} = -h^3 & & \\
0 & -1 & & \dfrac{h^3+h^3}{2h} = \dfrac{2h^3}{2h} = h^2 & \\
 & & \dfrac{h^4-1+1}{h} = h^3 & & \\
h & h^4-1 & & &
\end{array}$$

$$p_2(x) = h^4 - 1 - h^3(x+h) + h^2(x+h)x =$$
$$\cancel{h^4} - 1 \cancel{- h^3 x} - \cancel{h^4} + h^2x^2 \cancel{+ h^3 x} = h^2x^2 - 1$$

$$f(x) - p_2(x) = x^4 - 1 - (h^2x^2 - 1) = x^4 - h^2x^2$$

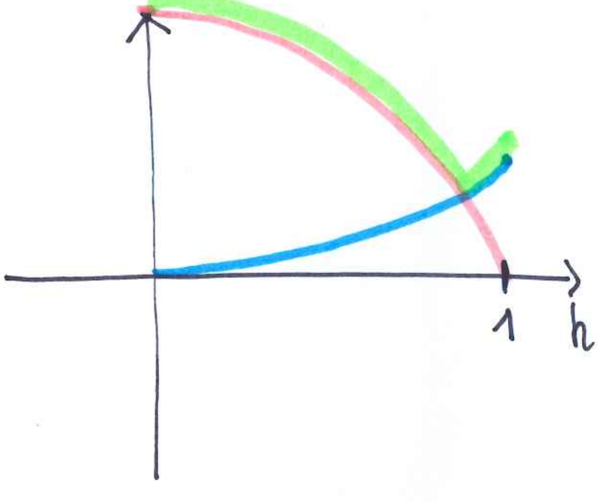
$$r(h) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\underbrace{x^4 - h^2x^2}_{\varphi(x)}|$$

$$\varphi(\pm 1) = 1 - h^2$$
$$\varphi'(x) = 4x^3 - 2h^2x = 2x(2x^2 - h^2) \geq 0$$



$$\varphi\left(\pm \frac{h}{\sqrt{2}}\right) = \left| \frac{h^4}{4} - h^2 \cdot \frac{h^2}{2} \right| = \frac{h^4}{4}$$
$$\varphi(0) = 0$$

$$r(h) = \max\left\{ \frac{h^4}{4}, 1 - h^2 \right\}$$



4) Costruire il polinomio $p_2 \in \mathbb{P}_2$ che interpola $f(x) = x^4 + 1$ nei nodi $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, $0 < h \leq 1$. Successivamente si rappresenti graficamente la funzione

$$r(h) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p_2(x)|,$$

al variare di $h \in (0, 1]$.

$$\begin{array}{cccc}
-h & h^4+1 & & \\
 & & \dfrac{1-h^4-1}{h} = -h^3 & \\
0 & 1 & & \dfrac{h^3+h^3}{2h} = h^2 \\
 & & \dfrac{h^4+1-1}{h} = h^3 & \\
h & h^4+1 & &
\end{array}$$

$$p_2(x) = h^4 + 1 - h^3(x+h) + h^2(x+h)\cdot x =$$

$$\cancel{h^4} + 1 \cancel{- h^3 x} - \cancel{h^4} + h^2 x^2 \cancel{+ h^3 x} = h^2 x^2 + 1$$

$$f(x) - p_2(x) = x^4 + 1 - h^2 x^2 - 1 = x^4 - h^2 x^2$$

. . . . .