CALCOLO NUMERICO 1 (26 Novembre 2018)
PRIMA PROVA IN ITINERE

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

e stabilire per quali $x \in (1, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

2) Determinare se esistono valori dei parametri $a,\ b,\ c,\ d,\ e \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$S(x) = \begin{cases} a(x+1)^3 + b(x+1) + 1 & -1 \le x < 0 \\ \\ cx^3 + dx^2 + e & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

sia una spline cubica naturale sull'intervallo $[-1, 1]$.

3) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x \ \approx \alpha_1 f(-\beta) + \alpha_2 f(2\beta).$$

Determinare $\alpha_1, \alpha_1 \in \mathbb{R}^+$ e $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta? Si scriva la relativa formula composita associata alla suddivisione dell'intervallo $[-1, 1]$ in due sottointervalli di uguale ampiezza.

4) Costruire il polinomio $p_2 \in \mathbb{P}_2$ che interpola $f(x) = x^4 - 1$ nei nodi $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, $0 < h \le 1$. Successivamente si rappresenti graficamente la funzione

$$r(h) = \max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - p_2(x)|,$$

al variare di $h \in (0, 1]$.

5) Si consideri una formula di quadratura di tipo Gaussiano con $N \ge 1$ nodi $\{x_i\}_{i=1}^N$ e pesi $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$. Stabilire se esiste una costante $C \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \le C$$

CALCOLO NUMERICO 1 (26 Novembre 2018)
PRIMA PROVA IN ITINERE

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

e stabilire per quali $x \in (1, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

2) Determinare se esistono valori dei parametri $a,\ b,\ c,\ d,\ e \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$S(x) = \begin{cases} ax^3 + bx + 1 & 0 \le x < 1 \\ \\ c(x-1)^3 + d(x-1)^2 + e & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

sia una spline cubica naturale sull'intervallo $[0, 2]$.

3) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x\ \approx \beta_1 f(-2\alpha) + \beta_2 f(\alpha).$$

Determinare $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta? Si scriva la relativa formula composita associata alla suddivisione dell'intervallo $[-1, 1]$ in due sottointervalli di uguale ampiezza.

4) Costruire il polinomio $p_2 \in \mathbb{P}_2$ che interpola $f(x) = x^4 + 1$ nei nodi $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, $0 < h \le 1$. Successivamente si rappresenti graficamente la funzione

$$r(h) = \max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - p_2(x)|,$$

al variare di $h \in (0, 1]$.

5) Si consideri una formula di quadratura di tipo Gaussiano con $N \ge 1$ nodi $\{x_i\}_{i=1}^N$ e pesi $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$. Stabilire se esiste una costante $C \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \le C$$