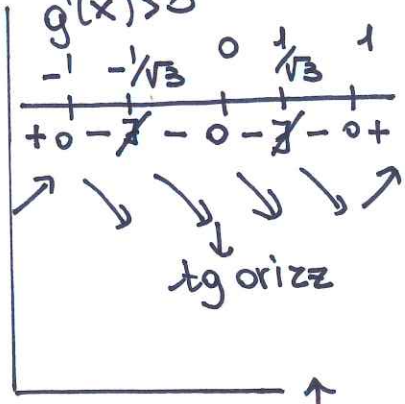
1) Data l'equazione non lineare $f(x) = x^3 - x$, avente tre radici $\alpha < \beta < \gamma$, applicare il metodo di Newton e, dopo averlo espresso nella forma di metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, studiarne la convergenza alla radice γ e l'ordine al variare di $x_0 > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Successivamente si determini un intervallo $(-a, a)$ in cui scegliere x_0 in modo tale che il metodo di punto fisso converga alla radice β.

Mate MI 1° itinere
19-11-19

$$\left[x^3 - x = 0 \qquad \alpha = -1 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 1\right]$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1}$$

$$g(x) = \frac{2x^3}{3x^2-1}$$



Studio $y = g(x)$

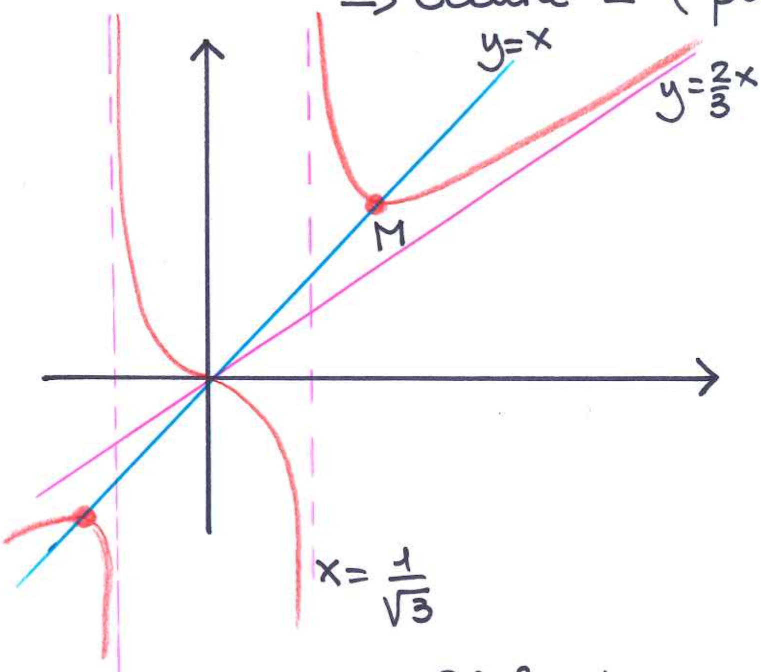
Funzione dispari; Asintoti verticali $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

" obliquo $y = \frac{2}{3}x$

$$g'(x) = 2\,\frac{3x^2(3x^2-1) - x^3(6x)}{(3x^2-1)^2} = 2 \cdot \frac{9x^4 - 3x^2 - 6x^4}{(3x^2-1)^2} = 6\,\frac{x^2(x^2-1)}{(3x^2-1)^2}$$

$g'(1) = 0 \qquad x = 1$ radice semplice per $g(x) = 0$

$\Rightarrow$ ordine 2 (per convergenza a γ)



minimo : $M(1,1)$

$\frac{1}{\sqrt{3}} < x_0 < 1 \qquad x_1 > 1$

$x_0 > 1 \qquad x_n$ successione monotona decrescente limitata inferiormente da 1, $x_n \searrow 1$

$x_0 > \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad x_n \to \gamma$ ordine 2

$$|g'(x)| < 1 \qquad \left|\frac{6x^2(x^2-1)}{(3x^2-1)^2}\right| < 1 \qquad -1 < \frac{6x^2(1-x^2)}{(3x^2-1)^2} < 1$$

ovvio

$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad 6x^2 - 6x^4 < 9x^4 - 6x^2 + 1 \qquad 15x^4 - 12x^2 + 1 > 0$

$$x^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36-15}}{15} = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{15} \quad \begin{cases} \frac{6+\sqrt{21}}{15} > \frac{1}{3} & 18 + 3\sqrt{21} > 15 \\ \frac{6-\sqrt{21}}{15} < \frac{1}{3} & 18 - 3\sqrt{21} < 15 \quad \text{Vero} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{\frac{6-\sqrt{21}}{15}}$$

N.B. $g'(0) = 0 \quad g''(0) = 0 \quad g'''(0) \neq 0$ ORDINE 3

1) Data l'equazione non lineare $f(x) = x^3 - 4x$, avente tre radici $\alpha < \beta < \gamma$, applicare il metodo di Newton e, dopo averlo espresso nella forma di metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, studiarne la convergenza alla radice γ e l'ordine al variare di $x_0 > \frac{2}{\sqrt{3}}$. Successivamente si determini un intervallo $(-a, a)$ in cui scegliere x_0 in modo tale che il metodo di punto fisso converga alla radice β.

1° itinere MI MATE 19-11-2019

$[x^3-4x=0 \quad \alpha=-2 \quad \beta=0 \quad \gamma=2]$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3-4x_n}{3x_n^2-4} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2-4} \qquad g(x)=\frac{2x^3}{3x^2-4}$$

Studio $y=g(x)$

Funzione dispari; Asintoti verticali $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$; as. obliquo $y=\frac{2}{3}x$

$$g'(x)=2\,\frac{3x^2(3x^2-4)-x^3\cdot 6x}{(3x^2-4)^2} = \frac{2\cdot(9x^4-12x^2-6x^4)}{(3x^2-4)^2} = \frac{6x^2(x^2-4)}{(3x^2-4)^2}$$

$g'(x)>0$

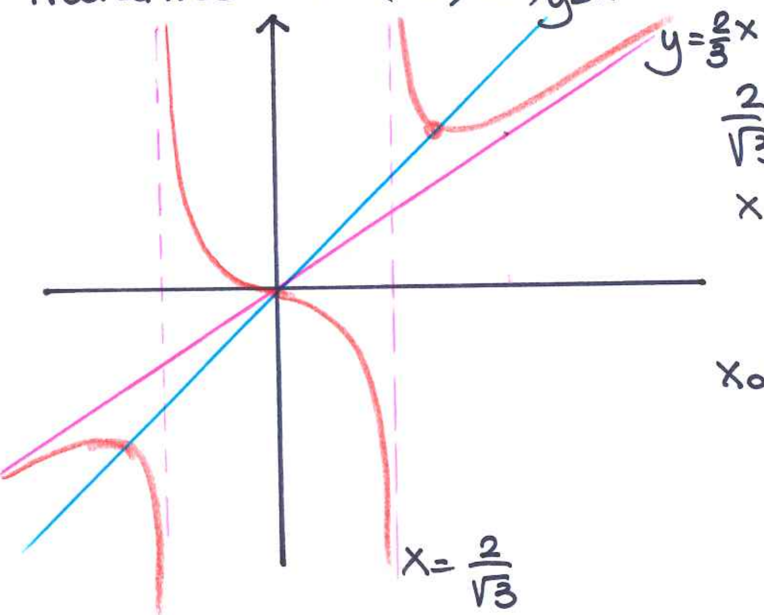
x		-2		$-2/\sqrt{3}$		0		$2/\sqrt{3}$		2	
g'	+	0	−	$\nexists$	−	0	−	$\nexists$	−	0	+
g	↗		↘		↘		↘		↘		↗

$g'(2)=0$

$x=2$ radice semplice per $g(x)=0$

$\Rightarrow$ ordine 2 (per convergenza a γ)

minimo $M(2;2)$



$\frac{2}{\sqrt{3}} < x_0 < 2 \qquad x_1 > 2$

$x_0>2$ x_n successione monotona decrescente limitata inferiormente da 2, $x_n \searrow 2$

$x_0 > \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad x_n \to \gamma$ ordine 2

$|g'(x)|<1 \qquad \left|\frac{6x^2(x^2-4)}{(3x^2-4)^2}\right|<1 \qquad -1 < \frac{6x^2(4-x^2)}{(3x^2-4)^2} < 1$ ovvio

$-\frac{2}{\sqrt{3}}<x<\frac{2}{\sqrt{3}}$

$24x^2-6x^4 < 9x^4-24x^2+16 \qquad 15x^4-48x^2+16>0$

$$x^2=\frac{24\pm\sqrt{576-240}}{15}=\frac{24\pm4\sqrt{21}}{15}$$

$\frac{24+4\sqrt{21}}{15} > \frac{4}{3} \qquad 72+12\sqrt{21}>60$

$\frac{24-4\sqrt{21}}{15} < \frac{4}{3} \qquad 72-12\sqrt{21}<60$

$$a=\sqrt{\frac{24-4\sqrt{21}}{15}}$$

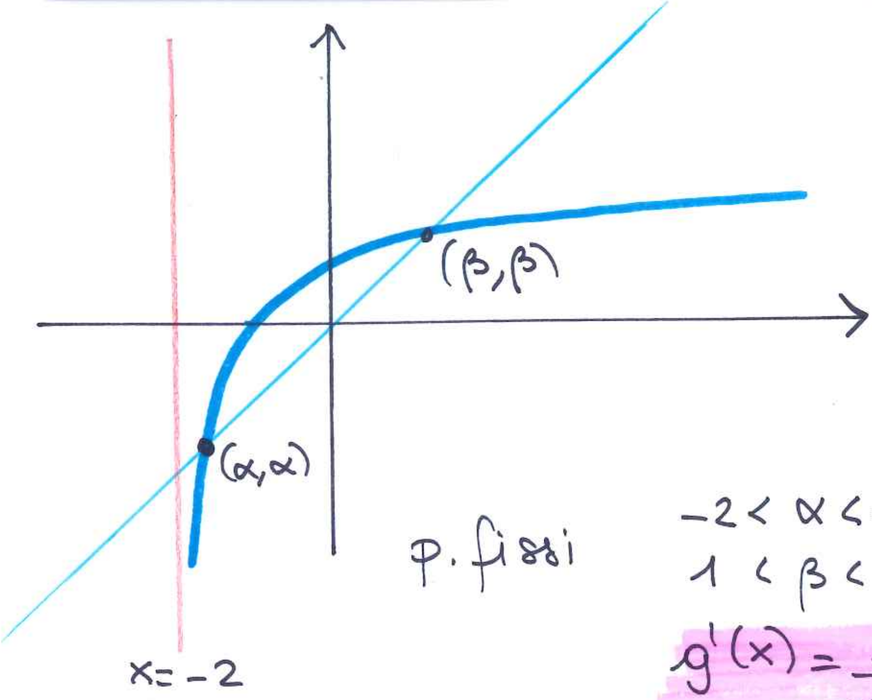
N.B. $g'(0)=0 \quad g''(0)=0$

$g'''(0)\neq0$ ORDINE 3

2) Data la funzione
$$g(x) = \ln(x+2),\ x \in (-2,\infty),$$
studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ per l'approssimazione dei punti fissi di g al variare di $x_0 > -2$. Per l'approssimazione del punto fisso di ascissa maggiore si consideri poi il metodo
$$x_{n+1} = G(x_n),\ n \geq 0,\ G(x) = g(x) - \frac{g'(x)}{1-g'(x)}(x - g(x)),$$
e si dimostri che quest'ultimo metodo, quando converge, è almeno del secondo ordine.

M1 Mate 1° stinere

19-11-19



x		$g(x)$
-1		0
0	$<$	$\ln 2$
1	$<$	$\ln 3$
2	$>$	$\ln 4$

p. fissi $\quad -2 < \alpha < -1 \quad \alpha = \ln(\alpha+2)$

$1 < \beta < 2 \quad \beta = \ln(\beta+2)$

$g'(x) = \dfrac{1}{x+2}$ decrescente

$\alpha < -1 \quad g'(-1) = 1 \quad g'(\alpha) > g'(-1) = 1$ Divergenza locale

$1 < \beta < 2 \quad g'(1) = \frac{1}{3} \quad g'(2) = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} < g'(\beta) < \frac{1}{3}$ Convergenza $x_0 \in I(\beta)$ ORDINE 1

$x_0 < \alpha \quad \exists \bar{k}$ tale che $x_{\bar{k}} < -2$

$\alpha < x_0 < \beta$, x_n successione monotona crescente lim sup da β: $x_n \nearrow \beta$

$x_0 > \beta \quad x_n$ " " decrescente lim inf da β: $x_n \searrow \beta$

$\Rightarrow x_0 > \alpha$, $x_n \to \beta$ con ordine 1

$$G(x) = \ln(x+2) - \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x+2}}(x - \ln(x+2)) =$$

$$= \ln(x+2) - \frac{1}{\cancel{x+2}} \frac{\cancel{x+2}}{x+1}(x - \ln(x+2)) = \ln(x+2) - \frac{1}{x+1}(x - \ln(x+2))$$

$$G'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+1)^2}(x - \ln(x+2)) - \frac{1}{x+1}\cdot\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+1)^2}[x - \ln(x+2)] - \frac{1}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{\cancel{x+1}}{x+2} = \frac{x - \ln(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$G'(\beta) = \frac{\beta - \ln(\beta+2)}{(\beta+1)^2} = 0 \quad [\beta \text{ è p.f. di } \ln(x+2)]$$

2) Data la funzione

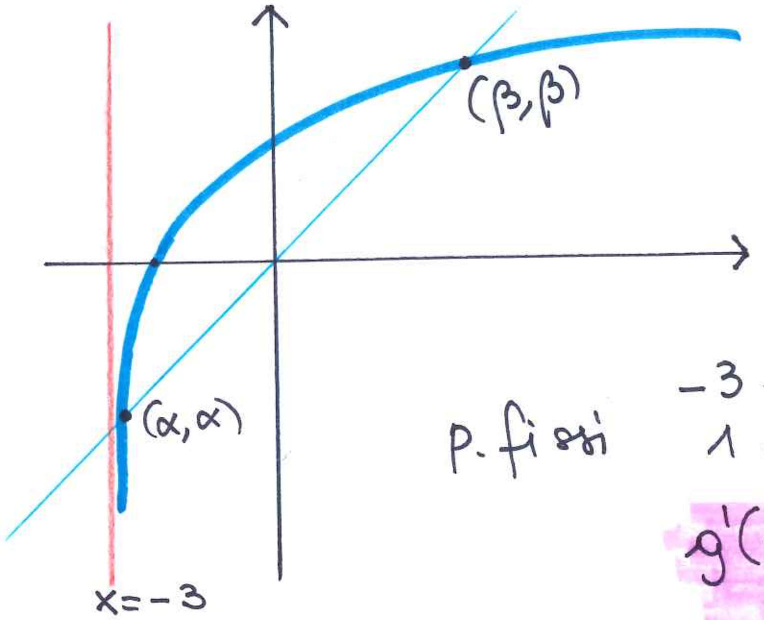
$$g(x) = \ln(x+3), \ x \in (-3, \infty),$$

studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ per l'approssimazione dei punti fissi di g al variare di $x_0 > -3$. Per l'approssimazione del punto fisso di ascissa maggiore si consideri poi il metodo

$$x_{n+1} = G(x_n), \ n \geq 0, \ G(x) = g(x) - \frac{g'(x)}{1 - g'(x)}(x - g(x)),$$

e si dimostri che quest'ultimo metodo, quando converge, è almeno del secondo ordine.

M1 Mate 1° itinere 19-11-19



x		$g(x)$
-2	$<$	0
1	$<$	$\ln 4$
2	$>$	$\ln 5$

p. fissi $\quad -3 < \alpha < -2 \quad \alpha = \ln(\alpha+3)$

$1 < \beta < 2 \quad \beta = \ln(\beta+3)$

$g'(x) = \dfrac{1}{x+3}$ decrescente

$\alpha < -2 \quad g'(-2) = 1 \quad g'(\alpha) > g'(-2) = 1$ Divergenza locale

$1 < \beta < 2 \quad g'(1) = \frac{1}{4} \quad g'(2) = \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} < g'(\beta) < \frac{1}{4}$

Convergenza, $x_0 \in I(\beta)$
ORDINE 1

$x_0 < \alpha \quad \exists\ \bar{k}$ tale che $x_{\bar{k}} < -3$

$\alpha < x_0 < \beta$, x_n successione mon. cresc. lim. sup da β: $x_n \nearrow \beta$

$x_0 > \beta$, x_n " " decres lim. inf. da β: $x_n \searrow \beta$

$\Rightarrow x_0 > \alpha \quad x_n \rightarrow \beta$ con ordine 1

$$G(x) = \ln(x+3) - \frac{1}{x+3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x+3}} (x - \ln(x+3)) =$$

$$= \ln(x+3) - \frac{1}{\cancel{x+3}} \cdot \frac{\cancel{x+3}}{x+2}(x - \ln(x+3)) = \ln(x+3) - \frac{1}{x+2}(x - \ln(x+3))$$

$$G'(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{(x - \ln(x+3))}{(x+2)^2} - \frac{1}{x+2}\left(1 - \frac{1}{x+3}\right) =$$

$$\cancel{\frac{1}{x+3}} + \frac{(x - \ln(x+3))}{(x+2)^2} - \cancel{\frac{1}{x+3}} = + \frac{x - \ln(x+3)}{(x+2)^2}$$

$$G'(\beta) = + [\beta - \ln(\beta+3)] \cdot \frac{1}{(\beta+2)^2} = 0 \quad [\beta \text{ è p.f. di } \ln(x+3)]$$

3) Data la matrice

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1-\epsilon \\ -1 & 1+\epsilon \end{pmatrix}, \quad 0<\epsilon<1,$$

rappresentare graficamente le funzioni $K_1(A_\epsilon)$ e $K_\infty(A_\epsilon)$ al variare di ϵ.

MATE 1° itinere
19-11-2019

$$\det A = 1+\varepsilon+1-\varepsilon = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\varepsilon & \varepsilon-1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\{1+1,\ 1-\varepsilon+1+\varepsilon\} = 2$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \frac{1}{2}\max\{1+\varepsilon+1,\ 1-\varepsilon+1\} = \frac{1}{2}\max\{2+\varepsilon, 2-\varepsilon\} = 1+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$K_1(A) = 2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) = 2+\varepsilon$$

$$\|A\|_\infty = \max\{1+1-\varepsilon,\ 1+1+\varepsilon\} = 2+\varepsilon;\ \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{2}\max\{1+\varepsilon+1-\varepsilon, 2\} = 1;\ K_\infty(A) = 2+\varepsilon$$

3) Data la matrice

$$B_\theta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-\theta & 1+\theta \end{pmatrix}, \quad 0<\theta<1,$$

rappresentare graficamente le funzioni $K_1(B_\theta)$ e $K_\infty(B_\theta)$ al variare di θ.

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\theta & 1 \\ \theta-1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det B = 1+\theta+1-\theta = 2$$

$$\|B\|_1 = \max\{1+1-\theta,\ 1+1+\theta\} = 2+\theta;$$

$$\|B^{-1}\|_1 = \frac{1}{2}\max\{\cancel{1+\theta+1-\theta}, 2\} = 1$$

$$K_1(B) = 2+\theta$$

$$\|B\|_\infty = \max\{1+1,\ 1-\theta+1+\theta\} = 2$$

$$\|B^{-1}\|_\infty = \frac{1}{2}\max\{1+\theta+1,\ 1-\theta+1\} = \frac{1}{2}(2+\theta) = 1+\frac{\theta}{2}$$

$$K_\infty(B) = 2+\theta$$

4) Data la matrice

MI Mate 1° itinere 19-11-19

$$B = \begin{pmatrix} 4 & \beta & 0 \\ \beta & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

4.1) trovare una condizione necessaria e sufficiente su β affinchè B sia diagonalmente dominante;

4.2) trovare una condizione necessaria e sufficiente su β affinchè B sia definita positiva;

4.3) calcolare $\|B\|_2$ in funzione di β;

4.4) calcolare la fattorizzazione $B = LU$ nel caso in cui B sia definita positiva e senza azione di pivoting.

4.1) $\begin{cases} 4 > |\beta| \\ 4 > |\beta| + 2 \\ 4 > 2 \end{cases}$ $\quad |\beta| < 2$

4.2) $\begin{cases} 4 > 0 \\ 16 - \beta^2 > 0 \\ \det B = \; 12 - \beta^2 > 0 \end{cases}$ $\quad |\beta| < 2\sqrt{3}$

4.3) $\|B\|_2 = \rho(B)$ (B è simmetrica)

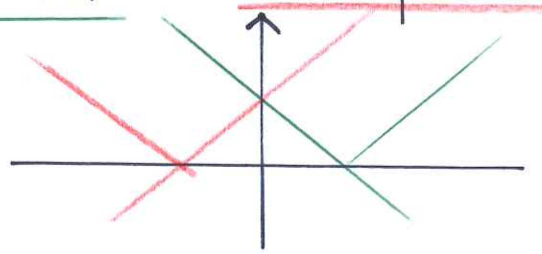
$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & \beta & 0 \\ \beta & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)\left[(4-\lambda)^2 - 4\right] - \beta^2(4-\lambda) = 0$$

$$(4-\lambda)\left[(4-\lambda)^2 - 4 - \beta^2\right] = 0$$

$$\lambda = 4 \qquad \lambda = 4 \pm \sqrt{\beta^2+4}$$

$$\left|4 - \sqrt{\beta^2+4}\right| < \left|4 + \sqrt{\beta^2+4}\right|$$



$\sqrt{\beta^2+4} = t > 0$

$|4 - t| < |4 + t|$

$$\|B\|_2 = 4 + \sqrt{\beta^2+4}$$

4.4)

$$m_{21} = \frac{\beta}{4} \qquad a_{22} = 4 - \frac{\beta^2}{4} = \frac{16-\beta^2}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & \beta & 0 \\ 0 & \frac{16-\beta^2}{4} & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad m_{32} = -2 \cdot \frac{4}{16-\beta^2} = \frac{8}{\beta^2-16} \qquad a_{33} = 4 + 2 \cdot \frac{8}{\beta^2-16} = \frac{4\beta^2-48}{\beta^2-16}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{\beta^2-16} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & \beta & 0 \\ 0 & \frac{16-\beta^2}{4} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{4\beta^2-48}{\beta^2-16} \end{bmatrix}$$

4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

4.1) trovare una condizione necessaria e sufficiente su α affinchè A sia diagonalmente dominante;

4.2) trovare una condizione necessaria e sufficiente su α affinchè A sia definita positiva;

4.3) calcolare $\|A\|_2$ in funzione di α;

4.4) calcolare la fattorizzazione $A = LU$ nel caso in cui A sia definita positiva e senza azione di pivoting.

1° itinere

Mate M1 19-11-2019

4.1) $\begin{cases} 2 > |\alpha| \\ 2 > |\alpha| + 1 \\ 2 > 1 \end{cases} \quad |\alpha| < 1$

4.2) $\begin{cases} 2 > 0 \\ 4 - \alpha^2 > 0 \\ \det A \quad 3 - \alpha^2 > 0 \end{cases} \quad |\alpha| < \sqrt{3}$

4.3) $\|A\|_2 = \rho(A)$ (A è simmetrica)

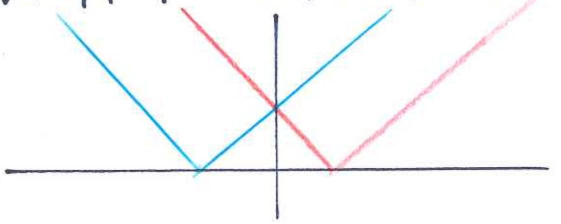
$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] - \alpha^2(2-\lambda) = 0$

$(2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1 - \alpha^2\right] = 0$

$\lambda = 2 \qquad \lambda = 2 \pm \sqrt{\alpha^2+1}$

$\left|2 - \sqrt{\alpha^2+1}\right| < \left|2 + \sqrt{\alpha^2+1}\right|$



$\sqrt{\alpha^2+1} = t > 0$

$|2 - t| < |2 + t|$

$\|A\|_2 = 2 + \sqrt{\alpha^2+1}$

4.4) $m_{21} = \dfrac{\alpha}{2} \qquad a_{22} = 2 - \dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{4-\alpha^2}{2}$

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & \frac{4-\alpha^2}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad m_{32} = \frac{-1}{\frac{4-\alpha^2}{2}} = \frac{2}{\alpha^2-4} \qquad a_{33} = 2 - \frac{(-1)2}{\alpha^2-4} = \frac{2\alpha^2-6}{\alpha^2-4}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\alpha^2-4} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & \frac{4-\alpha^2}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2\alpha^2-6}{\alpha^2-4} \end{bmatrix}$$

5) Dimostrare che, data una funzione $f \in C^3(\mathbb{R})$ avente una radice α con $f'(\alpha) \neq 0$, se f ha un flesso in α, allora il metodo di Newton converge ad α con ordine almeno cubico.

1° itinere, Mate MI 19-11-19

$f(\alpha)=0 \quad f'(\alpha)\neq 0 \quad f''(\alpha)=0$

$$G(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \text{Newton} \equiv x=G(x)$$

$$G'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$G'(\alpha) = \frac{f(\alpha) f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = \frac{0 \cdot 0}{[f'(\alpha)]^2}$$ almeno ordine 2

$$G''(x) = \frac{[f'(x) f''(x) + f(x) f'''(x)][f'(x)]^2 - f(x) f''(x) 2 f'(x) f''(x)}{[f'(x)]^4}$$

$$G''(\alpha) = \frac{[f'(\alpha) f''(\alpha) + f(\alpha) f'''(\alpha)][f'(\alpha)]^2 - f(\alpha)[f''(\alpha)]^2 2 \cdot f'(\alpha)}{[f'(\alpha)]^4} = 0$$

Almeno ordine 3

$$\left\{ \begin{array}{ll} f''(\alpha)=0 & \text{flesso} \\ f(\alpha)=0 & \text{radice} \end{array} \right\}$$