CALCOLO NUMERICO 1 (19 novembre 2019)
PRIMA PROVA IN ITINERE

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Data l'equazione non lineare $f(x) = x^3 - x$, avente tre radici $\alpha < \beta < \gamma$, applicare il metodo di Newton e, dopo averlo espresso nella forma di metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, studiarne la convergenza alla radice γ e l'ordine al variare di $x_0 > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Successivamente si determini un intervallo $(-a, a)$ in cui scegliere x_0 in modo tale che il metodo di punto fisso converga alla radice β.

2) Data la funzione

$$g(x) = \ln(x + 2),\ x \in (-2, \infty),$$

studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ per l'approssimazione dei punti fissi di g al variare di $x_0 > -2$. Per l'approssimazione del punto fisso di ascissa maggiore si consideri poi il metodo

$$x_{n+1} = G(x_n),\ n \geq 0,\ G(x) = g(x) - \frac{g'(x)}{1 - g'(x)}(x - g(x)),$$

e si dimostri che quest'ultimo metodo, quando converge, è almeno del secondo ordine.

3) Data la matrice

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1-\epsilon \\ -1 & 1+\epsilon \end{pmatrix},\ 0 < \epsilon < 1,$$

rappresentare graficamente le funzioni $K_1(A_\epsilon)$ e $K_\infty(A_\epsilon)$ al variare di ϵ.

4) Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & \beta & 0 \\ \beta & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ \beta \in \mathbb{R},$$

4.1) trovare una condizione necessaria e sufficiente su β affinchè B sia diagonalmente dominante;

4.2) trovare una condizione necessaria e sufficiente su β affinchè B sia definita positiva;

4.3) calcolare $\|B\|_2$ in funzione di β;

4.4) calcolare la fattorizzazione $B = LU$ nel caso in cui B sia definita positiva e senza azione di pivoting.

5) Dimostrare che, data una funzione $f \in C^3(\mathbb{R})$ avente una radice α con $f'(\alpha) \neq 0$, se f ha un flesso in α, allora il metodo di Newton converge ad α con ordine almeno cubico.

CALCOLO NUMERICO 1 (19 novembre 2019)
PRIMA PROVA IN ITINERE

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Data l'equazione non lineare $f(x) = x^3 - 4x$, avente tre radici $\alpha < \beta < \gamma$, applicare il metodo di Newton e, dopo averlo espresso nella forma di metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, studiarne la convergenza alla radice γ e l'ordine al variare di $x_0 > \frac{2}{\sqrt{3}}$. Successivamente si determini un intervallo $(-a, a)$ in cui scegliere x_0 in modo tale che il metodo di punto fisso converga alla radice β.

2) Data la funzione

$$g(x) = \ln(x+3),\ x \in (-3, \infty),$$

studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ per l'approssimazione dei punti fissi di g al variare di $x_0 > -3$. Per l'approssimazione del punto fisso di ascissa maggiore si consideri poi il metodo

$$x_{n+1} = G(x_n),\ n \geq 0,\ G(x) = g(x) - \frac{g'(x)}{1 - g'(x)}(x - g(x)),$$

e si dimostri che quest'ultimo metodo, quando converge, è almeno del secondo ordine.

3) Data la matrice

$$B_\theta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-\theta & 1+\theta \end{pmatrix},\ 0 < \theta < 1,$$

rappresentare graficamente le funzioni $K_1(B_\theta)$ e $K_\infty(B_\theta)$ al variare di θ.

4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R},$$

4.1) trovare una condizione necessaria e sufficiente su α affinchè A sia diagonalmente dominante;

4.2) trovare una condizione necessaria e sufficiente su α affinchè A sia definita positiva;

4.3) calcolare $\|A\|_2$ in funzione di α;

4.4) calcolare la fattorizzazione $A = LU$ nel caso in cui A sia definita positiva e senza azione di pivoting.

5) Dimostrare che, data una funzione $f \in C^3(\mathbb{R})$ avente una radice α con $f'(\alpha) \neq 0$, se f ha un flesso in α, allora il metodo di Newton converge ad α con ordine almeno cubico.