CALCOLO NUMERICO - (7 settembre 2005)

1) Analizzare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, l'esistenza di soluzioni dell'equazione $g(x) \equiv k - e^{-x} = x$. Posto $k > 1$, studiare la convergenza delle successioni costruite mediante il metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n),\ n \geq 0$ al variare di $x_0 \in \mathbf{R}$. Qual'è l'ordine di convergenza?

2) Assegnati i nodi $x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1$ e la funzione $f(x) = \frac{1}{x+1}$:

   2.1) Determinare il polinomio $p(x)$ che interpola la funzione $f(x)$ nei nodi.

   2.2) Dare una maggiorazione dell'errore che si commette sostituendo ad f il polinomio p, per $x \in [0,1]$.

   2.3) Approssimare $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ tramite $\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$ e calcolare l'errore commesso.

3) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & -a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{bmatrix}, \quad a > 0,$$

   3.1) Studiare in funzione di a la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^3$.

   3.2) Per i valori di a per cui entrambi i metodi convergono, si dica quale dei due converge più velocemente.

4) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad a > 0,$$

   per i valori di a per i quali A é non singolare:

   4.1) Calcolare A^{-1}.

   4.2) Determinare $\|A\|_\infty$, $\|A^{-1}\|_\infty$, $K_\infty(A)$.

   4.3) Determinare il valore di a per cui $K_\infty(A)$ è minimo.

5) Si consideri il problema della ricerca delle radici di un'equazione non lineare tramite il metodo $x_{n+1} = g(x_n),\ n \geq 0$, con x_0 opportuno. Dare la definizione di ordine di convergenza, illustrare la relazione che lega l'ordine di convergenza alle derivate della funzione $g(x)$ e proporre un test d'arresto.

6) (Solo per il corso avanzato) Descrivere il metodo dei minimi quadrati continui e dell'ottima approssimazione nell'approssimazione di una funzione $f(x) \in C^0[a,b]$.