CALCOLO NUMERICO (17 settembre 2007)

1) Determinare il grado di precisione della formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}[f'(-1) - f'(1)].$$

Utilizzare tale formula per approssimare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \mathrm{d}x$$

e calcolare l'errore commesso.

2) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare $f(x) = \sqrt[3]{x^\alpha}$ e discutere la convergenza dopo aver espresso il metodo di Newton nella forma di metodo iterativo di punto fisso

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad x_0 \text{ assegnato},$$

nel caso di $\alpha = 1, 2, 4$.

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^4$, $A = I + B$, e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ \beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0 :$$

3.1) fornire una condizione necessaria e sufficiente su β affinchè il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{f} - B\mathbf{x}^k$$

converga alla soluzione $\mathbf{x}$ del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$;

3.2) fornire una condizione necessaria e sufficiente su β affinchè il metodo di Gauss-Seidel converga.