CALCOLO NUMERICO (9 settembre 2008)

1) Dimostrare che la funzione

$$S(x) = \begin{cases} 1 + \frac{7}{4}x - \frac{3}{4}x^3, & x \in [0,1) \\ \\ 2 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{9}{4}(x-1)^2 + \frac{3}{4}(x-1)^3, & x \in [1,2] \end{cases}$$

è una spline cubica naturale che interpola i dati (0,1), (1,2), (2,0).

2) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Determinare per quali valori di α si verifica che:

2.1) A è non singolare;

2.2) A è definita positiva;

2.3) A è diagonalmente dominante;

2.4) il metodo di Jacobi è convergente;

2.5) il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

3) Si vuole approssimare la radice maggiore α dell'equazione non lineare $f(x) \equiv x^2 - 4x + 2 = 0$.

Dimostrare che il metodo di Newton converge ad α in $I = [3,4]$, $\forall x_0 \in I$.

Applicare il metodo di Newton per calcolare x_2 a partire da $x_0 = 4$, dare una stima dell'errore commesso e confrontarla con l'errore effettivo.

4) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*). Descrivere il metodo per la costruzione delle formule di quadratura di tipo Gauss-Legendre, giustificando i vari passaggi del procedimento.