

CALCOLO NUMERICO (3 settembre 2009)

- 1) Si scriva una function MATLAB che, dati in input una matrice simmetrica definita positiva A di dimensione $n \times n$ e un vettore b di dimensione n , calcoli la soluzione x del sistema lineare $Ax = b$, utilizzando la fattorizzazione di Cholesky di A e risolvendo con il comando "\ " i due sistemi triangolari.

- 2) Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}, \quad x \neq 0,$$

- 2.1) si trovino esplicitamente tutti i punti fissi della funzione g ;
2.2) si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, al variare del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si indichi l'ordine di convergenza.

- 3) Sia $A = I + B$, con

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati alla matrice A convergono entrambi o divergono entrambi, e, nel caso in cui convergono, si confrontino le velocità di convergenza.

- 4) Si consideri la seguente formula di quadratura, per il calcolo di $\int_0^2 f(x) dx$, che utilizza anche le derivate seconde

$$\tilde{I}(f) = Af(1) + Bf(2) + \frac{1}{3}f''(\alpha), \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in I.$$

Calcolare i valori di A, B e di α tali che la formula \tilde{I} abbia grado di precisione almeno 3.

- 5) Si consideri l'intervallo $I = [-1, 2]$ e la funzione

$$f(x) = \sinh \frac{x}{2} = \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{2}.$$

- 5.1) Calcolare, utilizzando il metodo di Lagrange, il polinomio di secondo grado $p_2(x)$ che interpola f nei punti di ascissa $-1, 0, 2$.
5.2) Stimare l'errore massimo di interpolazione $\max_{x \in I} |f(x) - p_2(x)|$.
5.3) Sia $S_1(x)$ la spline lineare che interpola $f(x)$ su una griglia di punti equispaziati in I . Stimare il numero minimo di intervalli necessari affinché

$$\max_{x \in I} |f(x) - S_1(x)| \leq 10^{-4}.$$

- 6) (Solo per gli studenti del corso avanzato).

Il metodo SOR: costruzione e studio della convergenza.