CALCOLO NUMERICO (22 settembre 2011)

1) Data la funzione

$$g(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{8}x^3 + \frac{7}{4}x^2,$$

1.1) si trovino esplicitamente tutti i punti fissi della funzione g;

1.2) si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k),\ k \geq 0$, al variare del punto iniziale $x_0 > 0$ e si indichi l'ordine di convergenza.

2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ e

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0,\ \beta \in \mathbb{R}:$$

2.1) trovare un CNS su β in funzione di α affinchè il metodo di Jacobi sia convergente;

2.2) trovare un CNS su β in funzione di α affinchè $||B_J||_1 < 1$, dove B_J è la matrice di iterazione del metodo di Jacobi. Generalizzare il risultato al caso di matrice A avente dimensione n.

3) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2} + \frac{\sqrt{x-1}}{2}$$

e stabilire per quali $x \in (1, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 5$.

4) Dato l'integrale definito

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x,$$

4.1) utilizzando la stima asintotica dell'errore, stimare quanti sottointervalli sono necessari affinchè l'errore assoluto relativo all'approssimazione con il metodo dei trapezi compositi sia inferiore a 10^{-4};

4.2) approssimare il valore di I mediante il metodo dei trapezi compositi utilizzando 4 sottointervalli di uguale ampiezza e stimare l'errore commesso utilizzando la stima asintotica dell'errore.

5) Enunciare e dimostrare il primo teorema di Gershgorin.