CALCOLO NUMERICO 1 (18 Settembre 2012)

1) Si consideri la seguente matrice A_N di dimensioni $N \times N$ ($N \geq 2$, intero),

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\alpha \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha > 0,$$

con 1 sulla prima riga (tranne l'ultimo elemento che è uguale a $1+\alpha$), e sulla diagonale principale e zero altrove.
1.1) Calcolare il condizionamento in norma infinito di A_N al variare del parametro N.
1.2) Supponendo di dover risolvere un sistema lineare di matrice A_N, con N fissato, si analizzi la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel. Si confrontino le velocità di convergenza.

2) Supponendo che la funzione $f(x) = \log(3+x)$, $-1 \leq x \leq 1$, venga interpolata da un polinomio P_N di grado $\leq N$, nei nodi

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2N+2}\pi\right), \ k = 0, 1, \dots, N,$$

fornire una stima per l'errore di interpolazione $\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - P_N(x)|$.

3) Data la formula di quadratura numerica

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx A_1 f(a) + A_2 f(1-a), \quad 0 \leq a < 1,$$

determinare il grado di precisione in funzione dei parametri A_1, A_2, a.

4) Studiare l' iterazione di punto fisso $x_{n+1} = e^{(x_n - 3)}$, per determinare uno zero positivo della funzione $f(x) = x - e^{(x-3)}$. Applicare e discutere il metodo di Newton per risolvere numericamente il medesimo problema.

5) Proporre un metodo numerico per calcolare una matrice B tale che $A = BB$, con A matrice quadrata simmetrica e definita positiva (cioè per calcolare la radice quadrata di A).