Cognome: ____________________ Nome: ____________________ Matricola: __________

Laboratorio di Calcolo Numerico - Corso di Laurea in Matematica
Appello d'esame del 18/09/2012

ESERCIZIO 1 [10 punti]

Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

e termine noto b scelto in modo che la soluzione esatta del sistema sia $x = (1, 1, 1)^T$.

1. Dopo aver giustificato perché il metodo di Gauss-Seidel applicato alla risoluzione numerica del sistema lineare converge, compiere 5 iterazioni di tale metodo, partendo dal vettore di innesco `x0=zeros(3,1)`. Quale è l'errore assoluto commesso dopo 5 iterazioni?
2. Sia B_{GS} la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel e $\rho(B_{GS})$ il suo raggio spettrale. Utilizzando opportunamente i valori trovati al punto precedente e la stima
$$||e^{k+1}||_\infty/||e^k||_\infty \simeq \rho(B_{GS})$$
si calcoli il raggio spettrale $\rho(B_{GS})$ della matrice di iterazione B_{GS} del metodo. Suggerimento: si prenda $k = 4$.
3. Si confronti il valore così trovato per il raggio spettrale con quello calcolato dalla definizione (con l'utilizzo dei comandi Matlab `inv,eig)`.

- errore alla 5 iterazione
- raggio spettrale trovato dalla stima:
- differenza stima e raggio spettrale esatto:

ESERCIZIO 2 [10 punti]

Data l'equazione

$$e^{x-2} = 3 - 2x$$

1. dimostrare tramite uno studio grafico che ha soluzione nell'intervallo $[0, 3]$;
2. determinare ordine e costante dell'errore relativi al seguente metodo di punto fisso per l'approssimazione della soluzione dell'equazione

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{2}(3 - e^{x^{(k)}-2}), \qquad k = 0, \ldots$$

Usare come soluzione esatta quella ricavata usando in modo opportuno il comando Matlab `fzero`

• studio grafico   • ordine del metodo di punto fisso   • costante dell'errore

ESERCIZIO 3 [10 punti]

Sia

$$f(x) = e^{-x^2}$$

1. Calcolare il polinomio $P_3 f(x)$ di grado 3 che interpola la funzione data in quattro nodi equispaziati nell'intervallo $[-2, 3]$. Quanto vale $e_f = |f(1.5) - P_3 f(1.5)|$?
2. Usare opportunamente il polinomio calcolato al punto 1. per stimare la derivata prima della funzione nel punto $x = 1.5$. Si riportino i comandi Matlab utilizzati e si dica quanto vale la differenza in valore assoluto (e_{df}) tra la derivata così calcolata e quella esatta
3. Usare opportunamente il polinomio calcolato al punto 1. per stimare l'integrale

$$I = \int_{-2}^{3} f(x)\, dx$$

Si riportino i comandi Matlab utilizzati e si dica quanto vale la differenza in valore assoluto (e_{if}) tra l'integrale così calcolato e quello esatto. Nota: si assuma per semplicità che l'integrale esatto sia dato dal comando Matlab `I=quad(f,-2,3)`.

- $e_f =$ $e_{df} =$ $e_{if}=$

  comandi Matlab

Appello x/x/2012 - Soluzione

Esercizio 1.

1. Il metodo di Gauss-Seidel converge, infatti la matrice A è a dominanza diagonale stretta per righe

```
>> A=[9 2 1; 1 5 0; 1 -3 7];
>> b=A*ones(3,1);
>> [x,iter]=gseidel(A,b,zeros(3,1),5,1e-10);
x-ones(3,1)

ans =

    7.930987281135060e-006
   -1.586197456271421e-006
   -1.812797092881624e-006
```

2. Stimiamo il raggio spettrale utilizzando, rispettivamente, l'errore dopo 5 e dopo 4 iterazioni di Gauss-Seidel

```
>> [x4,iter]=gseidel(A,b,zeros(3,1),4,1e-10);
>> e4=x4-ones(3,1);
>> [x5,iter]=gseidel(A,b,zeros(3,1),4,1e-10);
>> e5=x5-ones(3,1);
>> rhostima=norm(e5,'inf')/norm(e4,'inf')

rhostima=
      6.984126984004076e-002
```

3. Calcoliamo la differenza con il raggio spettrale calcolato tramite la definizione

```
>> D=diag(diag(A));
>> E=-tril(A,-1);
>> F=-triu(A,1);
>> BGS=inv(D-E)*F;
>> rho=max(abs(eig(BGS)))

rho =

    6.984126984126984e-002

abs(rhostima-rho)

ans =

    1.229086277199087e-012
```

Esercizio 2.

1. Mostriamo graficamente l'esistenza dello zero

```
>> f1=inline('exp(x-2)','x');
>> f2=inline('3-2*x','x');
>> x=linspace(0,3);
>> plot(x,f1(x),x,f2(x))
```

2. Il metodo converge con ordine 1 e costante circa pari a 0.2

```
>> phi=inline('1/2*(3-exp(x-2))','x');
>> [alphaptofisso,k,xv,errv]=ptofisso(phi,1,1e-5,300);
>> f=inline('exp(x-2)-3+2*x','x');
>> alpha=fzero(f,1)

alpha =

    1.261164968868392e+000
>> abs(xv(2:end)-alpha)./abs(xv(1:end-1)-alpha)
    2.101912507264952e-001
    2.455255937390968e-001
    2.371782469618374e-001
    2.394475954190565e-001
    2.377821054689251e-001
    2.429012994476005e-001
    2.221795502136218e-001
    3.137772819962441e-001
                         0
```

Esercizio 3.

1. Calcoliamo il polinomio $P_3 f(x)$ e la differenza con il valore della funzione nel punto $x = 1.5$

```
>> f=inline('exp(-x.^2)','x');
>> xv=linspace(-2,3,4);
>> yv=f(xv);
>> p=polyfit(xv,yv,3);
>> abs(f(1.5)-polyval(p,1.5))

ans =

    0.0140
```

2. Calcoliamo la derivata del polinomio $P_3 f(x)$ e la differenza con il valore della derivata esatta nel punto $x = 1.5$

```
>> df=inline('-2*x.*exp(-x.^2)','x');
>> pd=polyder(p);
>> edf=abs(df(1.5)-polyval(pd,1.5))
```

```
edf =

    0.1283
```

3. Calcoliamo l'integrale di $P_3 f(x)$ e la differenza con il valore dell'integrale di f calcolato con il comando `quad`

```
>> pi=polyint(p);
>> eif=abs((polyval(pi,3)-polyval(pi,-2))-quad(f,-2,3))

eif =

    2.379602394740947e-001
```