CALCOLO NUMERICO 1 (19 Settembre 2013)

1) Assegnata la funzione $f(x) = x^2 - x - 2$ ed i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = h$, con $h \in [0, 2]$, determinare il polinomio $p_1(x)$ che la interpola nei nodi assegnati. Successivamente scrivere l'espressione della funzione

$$r(h) = \max_{x \in [0,2]} |f(x) - p_1(x)|$$

al variare di h e calcolare il valore di h che la rende minima.

2) Si vuole approssimare l'integrale definito $I = \int_1^6 2 \log x dx$ con la formula dei trapezi compositi (I_T), suddividendo l'intervallo $[1, 6]$ in 10 sottointervalli di uguale ampiezza. Studiare l'errore $|I - I_T|$ utilizzando sia la formula classica che la formula asintotica. Non è richiesto il calcolo di I_T.

3) Studiare la convergenza e l'ordine dei metodi iterativi:

3.1) $x_{n+1} = (1 - \beta)x_n + 1$

3.1) $x_{n+1} = x_n \left[3(1 - \beta x_n) + \beta^2 x_n^2\right]$

per il calcolo di $1/\beta$, con $\beta \in (0, 1)$ e $x_0 \geq 0$.

4) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha & 0 & -\alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 1 & -\alpha & 0 & 2\alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

4.1) Determinare per quali valori di α la matrice A è non singolare.

4.2) Determinare per quali valori di α la matrice A è diagonalmente dominante.

4.3) Determinare per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel converge.

5) Si consideri l'approssimazione numerica dell'integrale $\int_a^b f(x)\omega(x)dx$, dove $\omega(x)$ è una funzione peso positiva ed integrabile, con una formula di quadratura di tipo Gaussiano $\sum_i A_i f(x_i)$ (con x_i nodi della formula e A_i i pesi corrispondenti).
Dimostrare che i pesi A_i sono positivi e che vale la relazione

$$\sum_i A_i = \int_a^b \omega(x)dx.$$