CALCOLO NUMERICO 1 (18 settembre 2014)
COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE

1) Data la funzione $f(x) = x^2 - 3x + 2$ studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l' ordine dei metodi iterativi

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{3}, \quad x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2,$$

per l'approssimazione degli zeri di f.

2) Assegnati i valori reali $a < b$, trovare ω_1 e ω_2 in modo tale che la formula di quadratura,

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \omega_1 f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + \omega_2 f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right)$$

abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta?

3) Stimare il numero minimo di sottointervalli di uguale ampiezza in cui si deve suddividere l'intervallo $[-1, 1]$, affinchè l'errore che si commette interpolando con una spline lineare la funzione $f(x) = x^2 + e^x + e^{-x}$ sia minore di 10^{-3}.

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & 1-\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1+\alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}:$$

4.1) determinare per quali valori del parametro α la matrice è diagonalmente dominante;

4.2) calcolare e rappresentare graficamente la quantità $\|A\|_\infty$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;

4.3) stabilire se per $\alpha = \frac{1}{2}$ i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono, motivando la risposta.

5) Dimostrare che una matrice diagonalmente dominante è non singolare.