Cognome: ____________ Nome: ____________ Matricola: ________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 18 settembre 2014

1) Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}\cos\ x_2 \equiv f_1(x_1,x_2) = 0 \\ \\ x_2 - \frac{1}{2}\sin\ x_1 \equiv f_2(x_1,x_2) = 0 \end{cases},$$

per approssimare le soluzioni α_1 e α_2 tali che $f_1(\alpha_1,\alpha_2) = f_2(\alpha_1,\alpha_2) = 0$, si implementi la seguente procedura iterativa: assegnati i valori di innesco al primo passo $k = 1$, $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = 0$

$$\forall k \geq 1 : \begin{cases} x_1^{(k+1)} = & \frac{1}{2}\cos\ x_2^{(k)} \\ \\ x_2^{(k+1)} = & \frac{1}{2}\sin\ x_1^{(k)} \end{cases}$$

Sia K il numero di iterazioni necessarie affinché $|f_i(x_1^{(K)}, x_2^{(K)})| \leq \varepsilon$, $i = 1,2$, $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$. Riportare i risultati nella tabella.

	K	$x_1^{(K)}$	$x_2^{(K)}$
$\varepsilon = 10^{-2}$			
$\varepsilon = 10^{-4}$			
$\varepsilon = 10^{-6}$			

2) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{b}$ il vettore tale che la soluzione esatta del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sia data da $\mathbf{x} = [1,1,1,1]^T$.

2.1) Si calcolino i rispettivi raggi spettrali delle matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel e si commentino i risultati

2.2) Si permutino la prima e la quarta riga della matrice A e si dica se in questo caso i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti

2.3) Usando il criterio di arresto $||A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}||_2 < 10^{-6}$ e il dato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0,0,0,0]^T$, si calcoli la soluzione del sistema al punto 2.2 usando i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel. Dette quindi, rispettivamente, $\mathbf{x_{JAC}}$ e $\mathbf{x_{GS}}$ le soluzioni calcolate con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel, si riportino i valori $||\mathbf{x} - \mathbf{x_{JAC}}||_\mathbf{2}$ e $||\mathbf{x} - \mathbf{x_{GS}}||_\mathbf{2}$

<u>RISULTATI</u>

commenti al punto 2.1:

commenti al punto 2.2:

Sistema permutato: $||\mathbf{x} - \mathbf{x_{JAC}}||_\mathbf{2}=$ $||\mathbf{x} - \mathbf{x_{GS}}||_\mathbf{2}=$

3) Sia $f(x) = 1/(1+3x^2)$, definita nell'intervallo $[-5,5]$.

3.1) Si interpoli $f(x)$ con una spline lineare s_1, considerando successivamente un numero $n = [40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560]$ di nodi di interpolazione equispaziati in $[-5,5]$. Si calcoli l'errore commesso in norma infinito rispetto ad una griglia fine data da `z=linspace(-5,5,5000)` e si riporti tale errore nel caso $n = 640$. Ricordando poi la stima dell'errore di interpolazione, si deduca empiricamente l'ordine di convergenza p_{s_1}. C'è accordo con la teoria?

3.2) Si ripetano i passaggi al punto precedente usando una spline cubica s_3 e si deduca empiricamente l'ordine di convergenza p_{s_3}.

3.3) Si consideri infine l'errore tra derivata prima esatta della funzione e derivata prima dell'interpolante spline cubica s_3'. Si deduca empiricamente l'ordine di convergenza p_{s_3d}.

<u>RISULTATI</u>

caso $n = 640$: $||s_1(z) - f(z)||_\infty =$

caso $n = 640$: $||s_3(z) - f(z)||_\infty =$

caso $n = 640$: $||s_3'(z) - f'(z)||_\infty =$

$p_{s_1} =$

$p_{s_3} =$

$p_{s_3d}=$