CALCOLO NUMERICO 1 (17 settembre 2015)
COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE

1) Trovare l'espressione del numero di condizionamento del calcolo della funzione $g(x) = e^{f(x)}$.
Si dica se il calcolo della funzione g è ben condizionato nel caso in cui $f(x) = \sin x$ o $f(x) = \sqrt{x}$ e $x \in (0,1]$

$$K_g(x) = \frac{|x\, g'(x)|}{|g(x)|} = \frac{|x f'(x)|\, e^{f(x)}}{e^{f(x)}} = |x f'(x)|$$

C.E. $x \neq 0$
$K_f(x)$, cfr $\frac{\Delta x}{x}$

- $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

$$K_g(x) = |x \cos x| \leq 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow \text{ben condizionato}$$
$x \in [0,1]$

- $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$K_g(x) = \left|x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \frac{\sqrt{x}}{2} \leq \frac{1}{2} \rightarrow \text{ben condizionato}$$

2) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{3,1},$$

2.1) studiare la convergenza del metodo di Jacobi e stimare quante iterazioni sono necessarie affinchè si abbia:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq 10^{-4}, \quad \text{con } \mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$$

MI
17 - 9 - 2015

2.2) studiare la convergenza del metodo iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{1}{2} M^{-1}\mathbf{f} + M^{-1}N\mathbf{x}^{(k)}, \; k \geq 0, \; \mathbf{x}^{(0)} \text{dato;}$$

2.3) stabilire la relazione fra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi.

2.1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -1/2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2\lambda \end{pmatrix} =$

$2\lambda\left(4\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) + (-2\lambda) = 2\lambda\left(4\lambda^2 - \frac{1}{4} - 1\right) = 0$

$\lambda = 0 \quad \lambda^2 = \frac{5}{16} \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{4} \quad \rho(B_J) = \frac{\sqrt{5}}{4} < 1$

$k \geq \frac{-\ln 10^{-4}}{-\ln \rho(B_J)} = \frac{9.21034}{0.581575} \approx 15.84 \Rightarrow \bar{k} = 16$

2,2) $x = \frac{1}{2} M^{-1} f + M^{-1} N x$

$2x = M^{-1} f + 2M^{-1} N x$

$2Mx = f + 2Nx$

$2(M-N)x = f$

Calcolo $2(M-N) = 2M - 2N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} = A$ Metodo consistente

$$B = M^{-1} N =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \lambda & \frac{1}{32} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{16} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

$$(-\lambda)\left[\left(\frac{1}{4} - \lambda\right)\left(\frac{1}{16} - \lambda\right) - \frac{1}{64}\right] = 0$$

$$\lambda\left(\cancel{\frac{1}{64}} - \frac{1}{16}\lambda - \frac{1}{4}\lambda + \lambda^2 - \cancel{\frac{1}{64}}\right) = 0$$

$$\lambda\left(\lambda^2 - \frac{5}{16}\lambda\right) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda_3 = \frac{5}{16} \quad \rho(B) = \frac{5}{16}$$

$$R(B_J) = -\ln\frac{\sqrt{5}}{4} \qquad R(B) = -\ln\frac{5}{16} = 2\left[-\ln\frac{\sqrt{5}}{4}\right] =$$

$$2R(B_J)$$

Velocità doppia

3) Si determinino i parametri α e β in modo tale che la formula di quadratura

M1 17-9-2015

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(\alpha) + \frac{2}{3}f(1) + \frac{2}{3}f(\beta),$$

abbia grado di precisione massimo. Qual è il grado di precisione della formula ottenuta? E' una formula di tipo Gaussiano?

$r=0 \quad f(x)=1$

$$\int_0^2 1\,dx = 2 \qquad \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2$$

$r=1 \quad f(x)=x$

$$\int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2} = 2 \qquad \frac{2}{3}(\alpha)+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(\beta)=2$$

$$\frac{1}{3}(\alpha+\beta)=\frac{2}{3} \qquad \alpha+\beta=2$$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3} = \frac{8}{3} \qquad \frac{2}{3}\alpha^2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\beta^2=\frac{8}{3}$$

$$\frac{2}{3}(\alpha^2+\beta^2)=2$$

$$\alpha^2+\beta^2=3$$

$$\begin{cases}\alpha=2-\beta\\(2-\beta)^2+\beta^2=3\end{cases} \qquad \begin{cases}\text{———}\\2\beta^2-4\beta+1=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha=2-1\mp\frac{\sqrt{2}}{2}=1\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\\\beta=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{2}{3}f(1)+\frac{2}{3}f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$r=3 \qquad \int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4} = 4$

$$\frac{2}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{2}{3}\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+1\right]$$

$$\frac{2}{3}\left[1-\cancel{\frac{3\sqrt{2}}{2}}+\frac{3}{2}-\cancel{\frac{3}{2\sqrt{2}}}+1+\cancel{\frac{3\sqrt{2}}{2}}+\frac{3}{2}+\cancel{\frac{3}{2\sqrt{2}}}+1\right]=$$

$$\frac{2}{3}\left(3+3\right)=4 \qquad \text{G.P.} \geq 3$$

$r=4$

$$\int_0^2 x^4\,dx=\frac{32}{5}$$

$$\frac{2}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$$

$$\frac{2}{3}\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4+1+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right]$$

$$\frac{2}{3}\left[\frac{95}{10}\right]=\frac{19}{3} \qquad \Rightarrow \text{G.P. } 3$$

4) Data $f(x) = \sin x$, $x \in [-1, 1]$, sia p_2 il polinomio che interpola f nei nodi $x_0 = -a$, $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $0 < a \leq 1$.

4.1) Determinare l'espressione di p_2 nella forma di Lagrange;

MI 17-9-2015

4.2) scrivere l'espressione dell'errore $E(x) = f(x) - p_2(x)$.

4.3) dimostrare che, al variare del parametro $a \in (0, 1]$, il minor valore di $\|\omega\|_\infty$, dove $\omega(x) = (x + a)x(x - a)$, si ha per $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.1)

$$L_0(x) = \frac{x(x-a)}{2a^2} \; ; \quad L_1(x) = -\frac{(x-a)(x+a)}{a^2} \; ; \quad L_2(x) = \frac{x(x+a)}{2a^2}$$

$$f(-a) = -\text{sen}\, a, \quad f(0) = 0, \quad f(a) = \text{sen}\, a$$

$$p_2(x) = -\text{sen}\, a \left(\frac{x^2 - ax}{2a^2}\right) + \text{sen}\, a \left(\frac{x^2 + ax}{2a^2}\right) =$$

$$= \text{sen}\, a \left(-\cancel{\frac{x^2}{2a^2}} + \frac{x}{2a} + \cancel{\frac{x^2}{2a^2}} + \frac{x}{2a}\right) = \frac{\text{sen}\, a}{a}\, x$$

4.2)

$$E(x) = f(x) - p_2(x) = \frac{\omega(x)}{3!} f^{(3)}(t_{(x)})$$

$$\omega(x) = x(x^2 - a^2)$$

$$f(t) = \text{sen}\, t, \quad f'(t) = \cos t; \quad f''(t) = -\text{sen}\, t; \quad f'''(t) = -\cos t$$

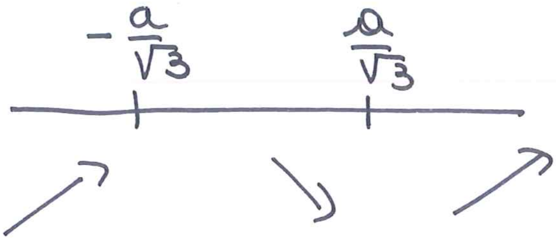
$$E(x) = -\frac{1}{6} x(x^2 - a^2) \cos t_{(x)}$$

4.3)

$$\min_{a \in (0,1]} \max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega(x)| = \min_{a \in (0,1]} \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 - a^2 x|$$

$$\omega'(x) = 3x^2 - a^2 = 0$$

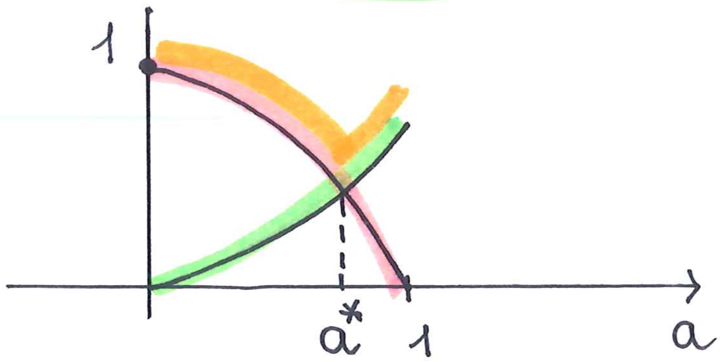
$$x^2 = \frac{a^2}{3} \qquad x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$$



$$w\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{a^3}{3\sqrt{3}} - \frac{a^3}{\sqrt{3}} = \mp \frac{2}{3\sqrt{3}}\, a^3 \qquad (w \text{ dispari})$$

$$w(\pm 1) = \pm(1-a^2) \qquad |w(\pm 1)| = 1-a^2 \qquad a \in (0,1]$$

$$\max\left\{ 1-a^2 ;\ \frac{2}{3\sqrt{3}}\, a^3 \right\} = \varphi(a)$$



$$\min_{0<a\le} \varphi(a) = \varphi(a^*)$$

a^* è t.c. $\quad 1-(a^*)^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}(a^*)^3$

$a^* = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \, \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\downarrow$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \qquad$ CVD

5) Dato il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ per l'approssimazione degli zeri di $f \in C^1$, con $g(x) = x + \beta[f(x)]^p$, $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, dire se, al variare di p, esiste un valore di β in funzione delle radici di f per cui si possa avere convergenza quadratica.

MI 17-09-2015

$$g(x) = x + \beta\,[f(x)]^p \qquad f \in C^1 \Rightarrow g \in C^1$$

$$g'(x) = 1 + \beta \cdot p\,[f(x)]^{p-1} f'(x) \qquad p \geq 1$$

Casi particolari

$p = 1$

$$g(x) = x + \beta f(x)$$

$$g'(x) = 1 + \beta f'(x)$$

$$g'(\alpha) = 1 + \beta f'(\alpha) = 0$$

$$\beta = -\frac{1}{f'(\alpha)}$$

$p > 1$

$$g'(x) = 1 + \beta\, p\,[f(x)]^{p-1} f'(x)$$

$$g'(\alpha) = 1$$

non si può avere conv. quadratica