CALCOLO NUMERICO 1 (17 settembre 2015)
COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE

1) Trovare l'espressione del numero di condizionamento del calcolo della funzione $g(x) = e^{f(x)}$.
Si dica se il calcolo della funzione g è ben condizionato nel caso in cui $f(x) = \sin x$ o $f(x) = \sqrt{x}$ e $x \in [0, 1]$.

2) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{3,1},$$

2.1) studiare la convergenza del metodo di Jacobi e stimare quante iterazioni sono necessarie affinchè si abbia:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq 10^{-4}, \quad \text{con } \mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$$

2.2) studiare la convergenza del metodo iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{1}{2} M^{-1}\mathbf{f} + M^{-1}N\mathbf{x}^{(k)}, \; k \geq 0, \; \mathbf{x}^{(0)}\text{dato;}$$

2.3) stabilire la relazione fra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi.

3) Si determinino i parametri α e β in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{2}{3} f(\alpha) + \frac{2}{3} f(1) + \frac{2}{3} f(\beta),$$

abbia grado di precisione massimo. Qual è il grado di precisione della formula ottenuta? E' una formula di tipo Gaussiano?

4) Data $f(x) = \sin x$, $x \in [-1, 1]$, sia p_2 il polinomio che interpola f nei nodi $x_0 = -a$, $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $0 < a \leq 1$.

4.1) Determinare l'espressione di p_2 nella forma di Lagrange;

4.2) scrivere l'espressione dell'errore $E(x) = f(x) - p_2(x)$.

4.3) dimostrare che, al variare del parametro $a \in (0, 1]$, il minor valore di $\|\omega\|_\infty$, dove $\omega(x) = (x + a)x(x - a)$, si ha per $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) Dato il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ per l'approssimazione degli zeri di $f \in C^1$, con $g(x) = x + \beta[f(x)]^p$, $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, dire se, al variare di p, esiste un valore di β in funzione delle radici di f per cui si possa avere convergenza quadratica.