1) Sia α la radice reale della funzione polinomiale $f(x) = x^3 - 2x + 2$.
Studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo

$$(a) \quad x_{n+1} = (2x_n - 2)^{1/3}$$

per l'approssimazione di α.
Dopo aver disegnato il grafico della funzione $y = g(x)$ associata al metodo iterativo

$$(b) \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 2}{3x_n^2 - 2}$$

dimostrare che il metodo iterativo (b) converge ad α per x_0 appartenente ad un opportuno intorno di α e stabilire l'ordine di convergenza.

MILANO

15/9/2016

$$g(x) = \sqrt[3]{2(x-1)} \qquad g(1) = 0$$

$$g(x) = x \qquad x = \sqrt[3]{2x-2} \qquad x^3 = 2x - 2$$

x	x^3	$2x-2$
-2	$-8 <$	-6
-1	$-1 >$	-4
0	0	-2
1	1	0
2	8	2

$$-2 < \alpha < -1$$

$$g'(x) = \frac{1}{3}(2x-2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 > 0$$

$$\lim_{x \to 1} g'(x) = +\infty$$

$$g''(x) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)(2x-2)^{-\frac{5}{3}} \cdot 2 = -\frac{8}{9}(2x-2)^{-\frac{5}{3}}$$

$g''(x) > 0 \quad x < 1 \quad \Rightarrow g'$ crescente per $-2 < \alpha < -1$

Cond. suff.

$$|g'(-2)| = \left|\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(-6)^2}}\right| < 1$$

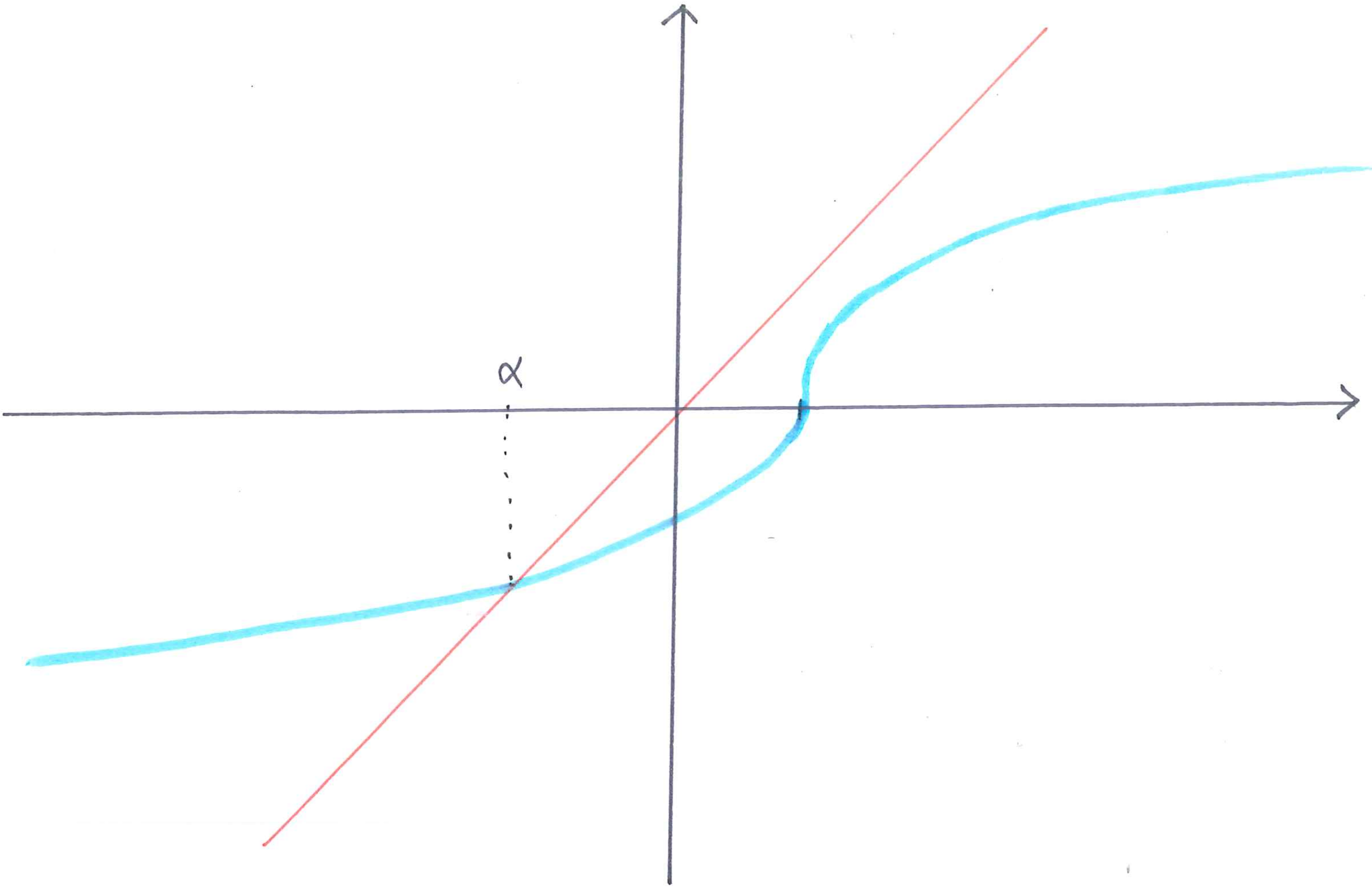
$$|g'(-1)| = \left|\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(-4)^2}}\right| < 1$$

$$\Rightarrow |g'(\alpha)| < 1$$

$$g'(\alpha) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

1° ordine



$x_0 < \alpha$ x_n succ. mon. crescente lim. sup. da α

$x_n \nearrow \alpha$

"$x_0 = \alpha$"   succ. costante $x_n = \alpha \quad \forall n$

$x_0 > \alpha$ x_n succ. mon. decrescente lim inf. da α

$x_n \searrow \alpha$

$\Rightarrow \quad x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{2x^3 - 2}{3x^2 - 2}$$

Osservazione: $f(x) = x^3 - 2x + 2$

m. d. Newton $\quad g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - \dfrac{x^3 - 2x + 2}{3x^2 - 2} = \dfrac{2x^3 - 2}{3x^2 - 2}$

AS. VERTICALI $\quad x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad x = +\sqrt{\frac{2}{3}} \quad ; \quad g(0) = 1$

AS. OBL: $y = \frac{2}{3}x$

Segno $\quad g(x) \geq 0 \qquad N \geq 0 \qquad x \geq 1$

$D > 0 \qquad x < -\sqrt{\frac{2}{3}} \ \vee \ x > \sqrt{\frac{2}{3}}$

		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		1	
N	$-$		$-$		$-$	$\bullet$	$+$
D	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$		$+$
g	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

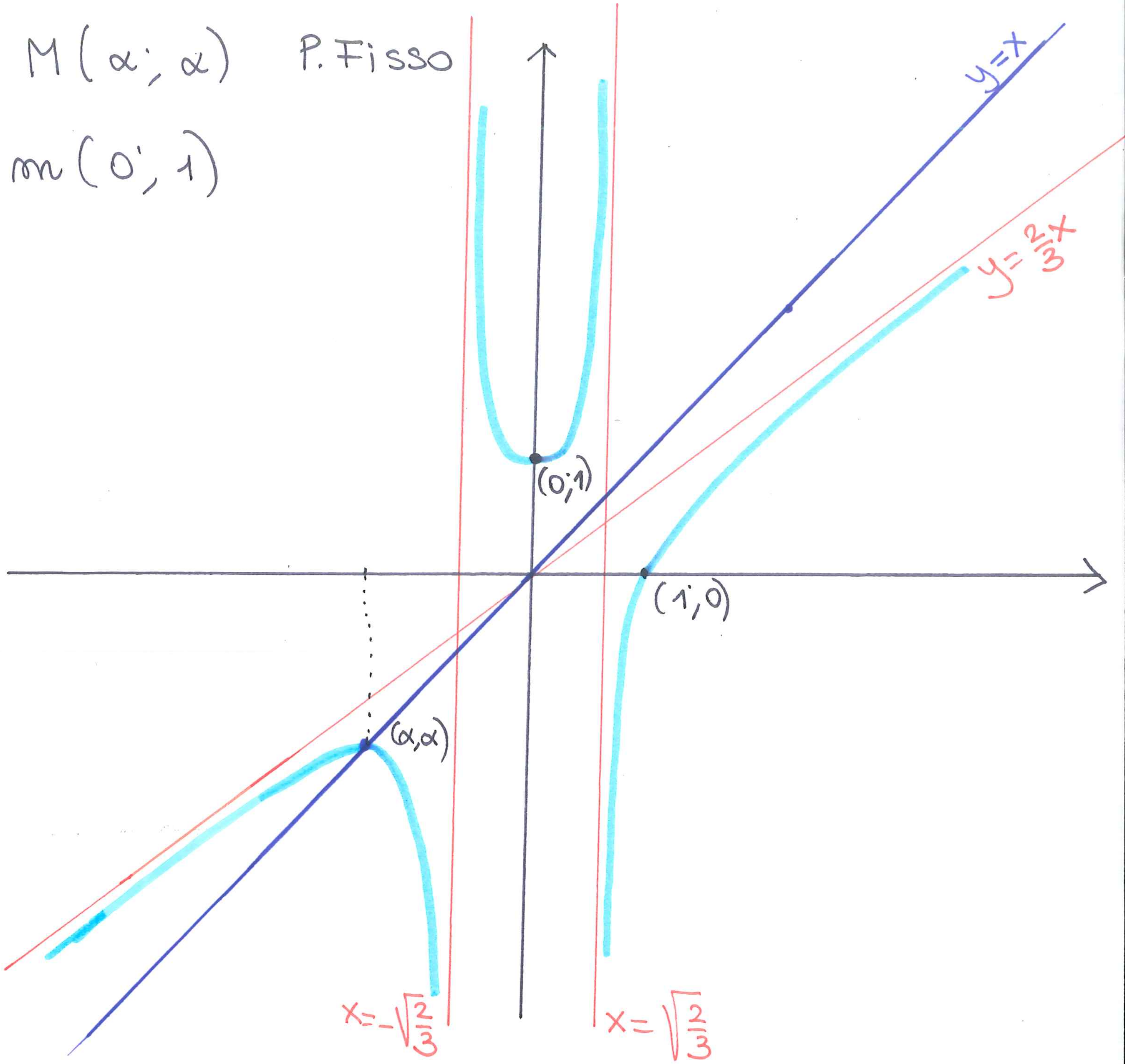
$$g'(x) = \frac{6x^2(3x^2-2) - 6x(2x^3-2)}{(3x^2-2)^2} = \frac{6x(3x^3 - 2x - 2x^3 + 2)}{(3x^2-2)^2} =$$

$$6x \, \frac{x^3 - 2x + 2}{(3x^2-2)^2} \geq 0 \qquad 6x \cdot \frac{f(x)}{(3x^2-2)^2} \geq 0$$

$N \geq 0 \qquad x \leq \alpha \ \vee \ x \geq 0$

$D > 0 \qquad x \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

		α		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$	
N	$+$	$\bullet$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$		$+$
D	$+$		$+$	$\circ$	$+$		$+$	$\circ$	$+$
g'	$+$	$\bullet$	$-$	$\nexists$	$-$	$\bullet$	$+$	$\nexists$	$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$



1) $x_0 < \alpha$ $\quad x_n$ succ. mon. cresc. conv. ad α : $x_n \nearrow \alpha$

2) $x_0 = \alpha \Rightarrow x_n = \alpha \ \forall n$

3) $\alpha < x_0 < -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_1 < \alpha$, vedi 1)

$\Rightarrow I(\alpha) = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

2° ordine $\quad g'(\alpha) = \dfrac{6\alpha\, f(\alpha)}{(3\alpha^2-2)^2} = 0 \quad (g''(\alpha) \neq 0)$

2) Trovare se vi sono valori dei parametri reali a, b, c, d, e per cui la seguente funzione definita per $x \in [-2,4]$,

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3, & x \in [-2,1] \\ c(x-2)^3, & x \in (1,3] \\ d(x-3) + e(x-2)^2, & x \in [3,4] \end{cases}$$

sia una funzione spline cubica. Eventualmente può essere una spline naturale?

MI 15|9|2016

$$f'(x) = \begin{cases} 2a(x-2) + 3b(x-1)^2 & [-2,1] \\ 3c(x-2)^2 & (1,3] \\ d + 2e(x-2) & [3,4] \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2a + 6b(x-1) \\ 6c(x-2) \\ 2e \end{cases}$$

$f \in C^0[-2,4]$ $\quad f(1^-) = a \quad f(1^+) = -c \quad a = -c$

$\quad f(3^-) = c \quad f(3^+) = e \quad c = e$

$f \in C^1[-2,4]$ $\quad f'(1^-) = -2a \quad f'(1^+) = 3c \quad -2a = 3c$

$\quad f'(3^-) = 3c \quad f'(3^+) = d+2e \quad 3c = d+2e$

$f \in C^2[-2,4]$ $\quad f''(1^-) = 2a \quad f''(1^+) = -6c \quad 2a = -6c$

$\quad f''(3^-) = 6c \quad f''(3^+) = 2e$

$$\begin{cases} a = -c \\ c = e \\ -2a = 3c \\ 3c = d+2e \\ 2a = -6c \end{cases} \quad a = c = 0 \quad \begin{cases} a = c = 0 \\ c = e \\ 3c = d+2e \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} a = c = e = 0 \\ \Downarrow \\ d = 0 \end{cases} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Naturale? $\quad f''(-2) = 27b = 0 \rightarrow b = 0$

$f''(4) = 0$

3) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix},$$

e il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, trovare l'insieme I_α dei valori α per i quali il metodo iterativo di Gauss-Seidel converge e l'insieme J_α dei valori α per cui il metodo di Jacobi converge.
Rappresentare graficamente i valori del raggio spettrale della matrice A del sistema lineare al variare di $\alpha \in I_\alpha$.

MILANO 15/9/2016

Convergenza del metodo di G.S.

$$\det\begin{bmatrix} 2\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha\lambda & 2\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha\lambda & 2\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad 2\lambda(4\lambda^2 - \alpha^2\lambda) - \alpha\lambda(2\alpha\lambda) =$$

$$2\lambda^2(4\lambda - \alpha^2 - \alpha^2) = 0$$

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\rho(B_{GS}) = \frac{\alpha^2}{2} < 1 \qquad -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2} \qquad I_\alpha = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

La matrice è tridiagonale: $\quad J_\alpha = I_\alpha$

Calcolo di $\rho(A)$:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 2-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - \alpha^2\right] - \alpha^2(2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 2\alpha^2\right] = 0$$

$$\begin{aligned} &\lambda = 2 & & \lambda = 2 \\ &(2-\lambda) = \sqrt{2}\,\alpha & \Rightarrow \quad & \lambda = 2 - \sqrt{2}\,\alpha \\ &(2-\lambda) = -\sqrt{2}\,\alpha & & \lambda = 2 + \sqrt{2}\,\alpha \end{aligned}$$

$$\rho(A) = \max\{\underbrace{2}_{\hat{\lambda}_1(\alpha)};\ \underbrace{|2-\sqrt{2}\alpha|}_{\hat{\lambda}_2(\alpha)};\ \underbrace{|2+\sqrt{2}\alpha|}_{\hat{\lambda}_3(\alpha)}\} =$$

$$\max\{\hat{\lambda}_1(\alpha), \hat{\lambda}_2(\alpha), \hat{\lambda}_3(\alpha)\}$$

$-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$

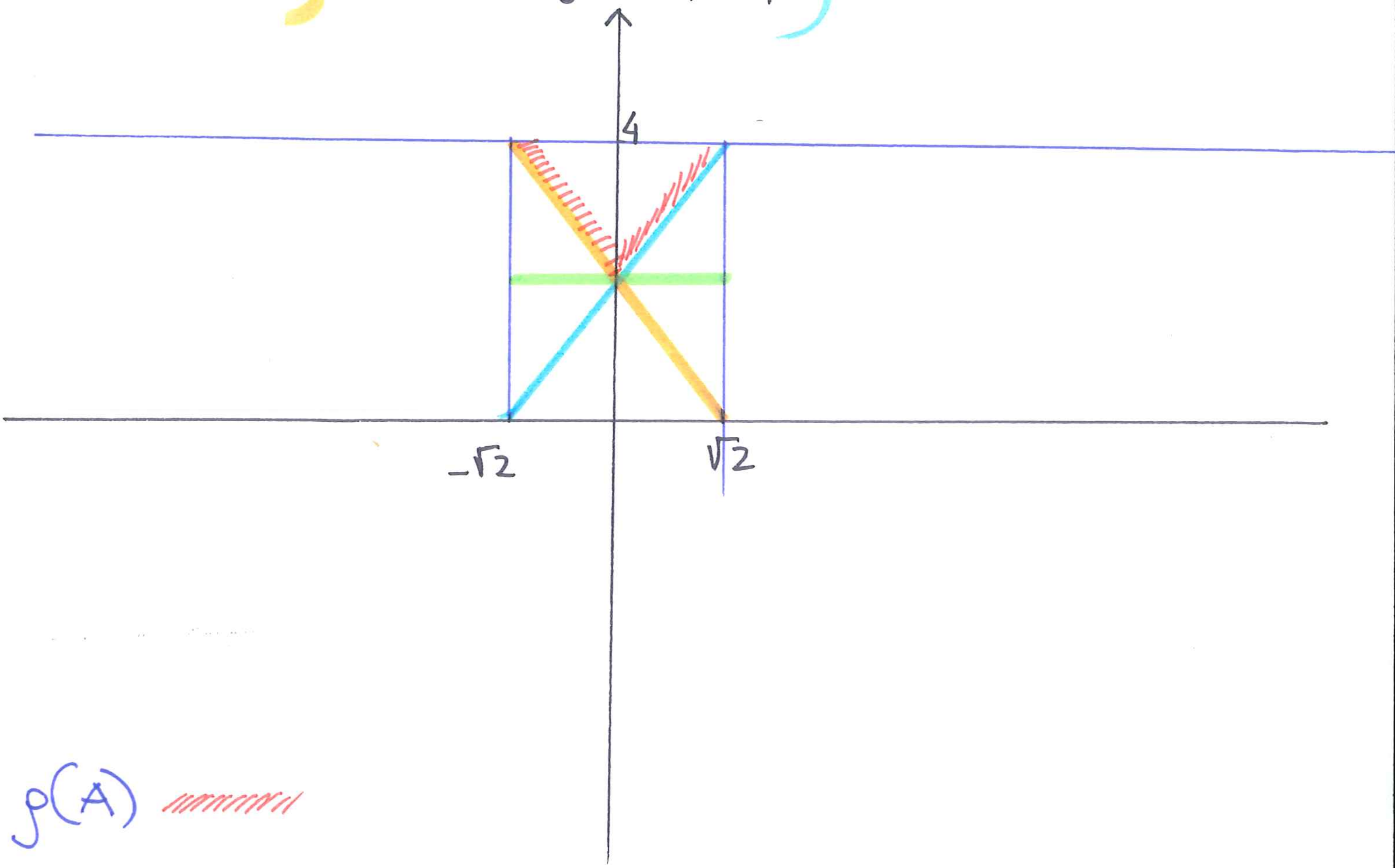
OSS:

$|2-\sqrt{2}\alpha| = \hat{\lambda}_2(\alpha)$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\lambda}_2(-\sqrt{2}) &= 4 \\ \hat{\lambda}_2(0) &= 2 \\ \hat{\lambda}_2(\sqrt{2}) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$|2+\sqrt{2}\alpha| = \lambda_3(\alpha)$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\lambda}_3(-\sqrt{2}) &= 0 \\ \hat{\lambda}_3(0) &= 2 \\ \hat{\lambda}_3(\sqrt{2}) &= 4 \end{aligned}\right\}$$



4) Trovare il valore $\alpha \in [-1,1]$ tale per cui la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\alpha) + f(-\alpha),$$

sia esatta per tutti i polinomi della forma $p(x) = a + bx + cx^3 + dx^4$, con a, b, c, d parametri reali. In caso affermativo la formula ottenuta è di tipo Gaussiano?

MILANO 15/3/2016

$$\int_{-1}^{1} (a + bx + cx^3 + dx^4)dx =$$

sfruttare la simmetria, oppure .....

$$ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^4}{4} + \frac{dx^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = a + \cancel{\frac{b}{2}} + \cancel{\frac{c}{4}} + \frac{d}{5} + a - \cancel{\frac{b}{2}} - \cancel{\frac{c}{4}} + \frac{d}{5}$$

$$= 2a + 2\frac{d}{5}$$

$$f(\alpha) + f(-\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^3 + d\alpha^4 + a - b\alpha - c\alpha^3 + d\alpha^4$$

$$= 2a + 2d\alpha^4$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{2a} + \frac{\cancel{2}d}{5} = \cancel{2a} + \cancel{2}d\alpha^4$$

$$\alpha^4 = \frac{1}{5}$$

$$\alpha = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$$

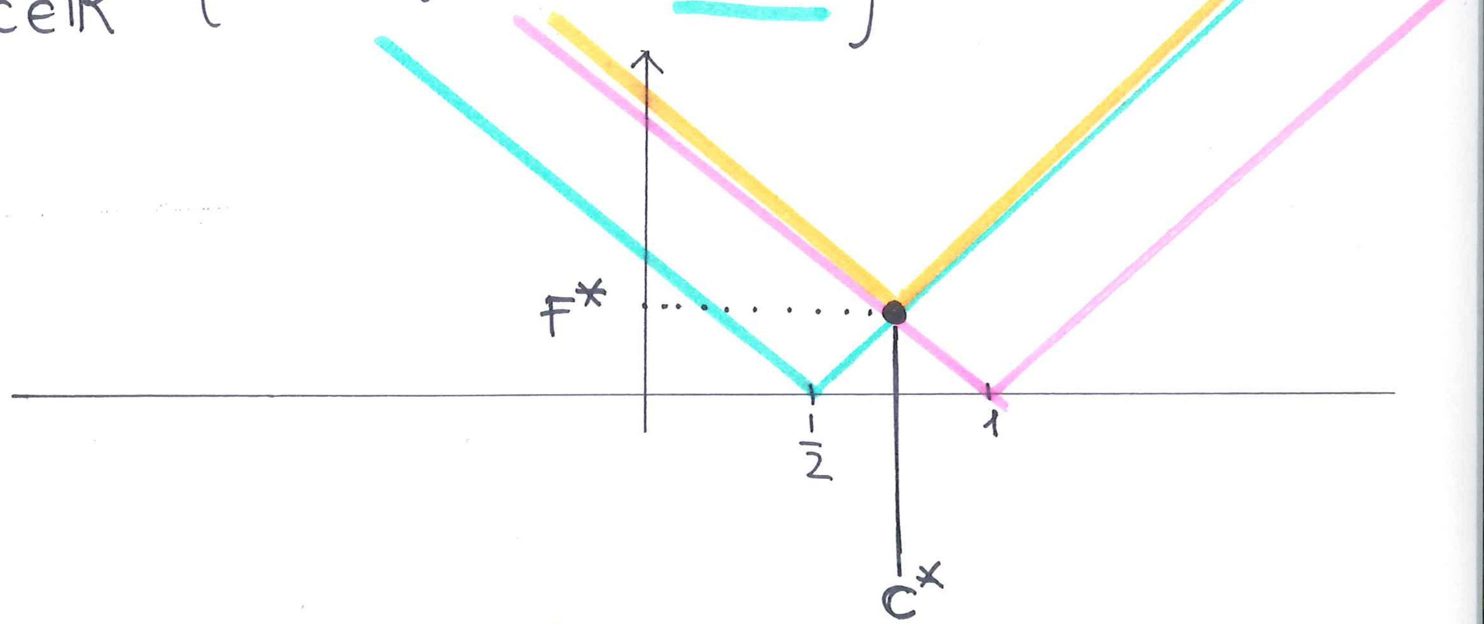
5) Data $f(x) = 1/(1+x)$, trovare il valore di $C \in \mathbb{R}$ che rende minima la quantità

$$\|f(x)-C\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)-C|.$$

$$\min_{c\in\mathbb{R}} \; \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{1+x} - c\right|$$

$$\max_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{1+x}-c\right| = \max\left\{|1-c| ; \left|\frac{1}{2} - c\right|\right\}$$

$$\min_{c\in\mathbb{R}} \left\{ \overbrace{\max\left\{\underline{|1-c|} ; \underline{\left|\tfrac{1}{2} - c\right|}\right\}} \right\} = F^*$$



F^* tale che $|1-c^*| = \left|\frac{1}{2} - c^*\right|$

$$1 - c^* = c^* - \frac{1}{2}$$

$$2c^* = \frac{3}{2} \qquad c^* = \frac{3}{4}$$

$$F^* = \frac{1}{4}$$