CALCOLO NUMERICO 1 (15 Settembre 2016) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Sia α la radice reale della funzione polinomiale $f(x) = x^3 - 2x + 2$.
Studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo

$$(a) \quad x_{n+1} = (2x_n - 2)^{1/3}, \; n \geq 0,$$

per l'approssimazione di α, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.
Dopo aver disegnato il grafico della funzione $y = g(x)$ associata al metodo iterativo

$$(b) \quad x_{n+1} = g(x_n) \equiv \frac{2x_n^3 - 2}{3x_n^2 - 2}, \; n \geq 0,$$

dimostrare che il metodo iterativo (b) converge ad α per x_0 appartenente ad un opportuno intorno di α e stabilire l'ordine di convergenza.

2) Trovare se vi sono valori dei parametri reali a, b, c, d, e per cui la seguente funzione definita per $x \in [-2, 4]$,

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3, & x \in [-2, 1] \\ c(x-2)^3, & x \in (1, 3] \\ d(x-3) + e(x-2)^2, & x \in (3, 4] \end{cases}$$

sia una funzione spline cubica. Eventualmente può essere una spline naturale?

3) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}, \; \alpha \in \mathbb{R},$$

e il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, trovare l'insieme I_α dei valori α per i quali il metodo iterativo di Gauss-Seidel converge e l'insieme J_α dei valori α per i quali il metodo di Jacobi converge.
Rappresentare graficamente i valori del raggio spettrale della matrice A al variare di $\alpha \in I_\alpha$.

4) Trovare il valore $\alpha \in [-1, 1]$ tale per cui la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\alpha) + f(-\alpha),$$

sia esatta per tutti i polinomi della forma $p(x) = a + bx + cx^3 + dx^4$, con a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. La formula ottenuta è di tipo Gaussiano?

5) Data $f(x) = \frac{1}{1+x}$, trovare il valore di $C \in \mathbb{R}$ che rende minima la quantità

$$\|f(x) - C\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - C|.$$