Cognome: ________________ Nome: ________________ Matricola: __________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 16 settembre 2016

1) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10, \qquad x \in [0, 2].$$

Si trovi lo zero di tale funzione nell'intervallo considerato utilizzando:

1. il metodo di Newton
2. il metodo di punto fisso con funzione di iterazione $g(x) = \sqrt{10/(x + 4)}$
3. il seguente metodo, detto di Steffensen: assegnato il guess x_0, calcolare per $n \geq 0$ la successione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$

Sia α lo zero "esatto" della funzione, ottenuto dalla function `fzero`. Partendo da $x_0 = 0$ e utilizzando `toll=1e-6` (test basato sulla differenza di iterate successive), si calcoli l'errore commesso in valore assoluto per ciascuno dei metodi proposti.

RISULTATI

errore metodo Newton

errore metodo punto fisso

errore metodo Steffensen

2) Sia H_n la matrice di Hilbert di ordine n, per $n = 1, \ldots,$ e sia $\mathbf{b}$ il termine noto tale che la soluzione esatta del sistema $H_n\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sia il vettore $\mathbf{x} = [1, 1, \ldots, 1]^T$.

1. Si verifichi fino a quale valore di $n = \overline{n}$ la matrice H_n risulta essere, in aritmetica finita, simmetrica e definita positiva. In particolare, quale proprietà delle due elencate viene meno?
2. Si calcoli per $n < \overline{n}$ con il comando Matlab `chol` il fattore R_n triangolare superiore tale che $R_n^T R_n = H_n$ e si risolva con tale fattorizzazione il sistema lineare. Per quale valore di n la norma 2 relativa dell'errore è maggiore di 10^{-1}?
3. Si consideri la seguente scrittura del generico termine diagonale della matrice R_n

$$r_{jj} = \sqrt{2j - 1}\frac{((j - 1)!)^2}{(2j - 1)!}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

   Per quale valore di n si ha per la prima volta $r_{nn} < 10^{-8}$?

RISULTATI

$\overline{n}$ tale che H_n simmetrica e definita positiva? Quale proprietà delle due elencate viene meno?

n tale che norma 2 errore relativo maggiore di 10^{-1}:

n tale che $r_{nn} < 10^{-8}$

3) Si consideri l'approssimazione numerica dell'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{-\log(x)}\, dx = \sqrt{\pi}/2$$

1. Quale formula composita di Newton-Cotes, tra quelle del punto medio, trapezi e Simpson è opportuno usare per l'approssimazione dell'integrale proposto? Perché?
2. si usi la formula scelta per l'approssimazione dell'integrale e si verifichi sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo, considerando successivamente [10, 20, 40, 80, 160, 320] intervalli di integrazione. Cosa si osserva? Che spiegazione si può dare del risultato ottenuto?

RISULTATI

formula scelta con motivazione:

ordine trovato:

spiegazione: