CALCOLO NUMERICO 1 (15 settembre 2017)

1) Calcolare, al variare di $x \neq 0$ il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione
$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$
e stabilire per quali x risulta essere $K_f(x) \leq 10$. Commentare il risultato ottenuto.

$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $\quad$ $f'(x) = \frac{1}{x^2}$

$$K_f(x) = \left| \frac{x \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} \right| = \frac{1}{|x-1|} \qquad x \neq 1 \wedge x \neq 0$$

$\frac{1}{|x-1|} \leq 10$ $\quad$ $|x-1| \geq \frac{1}{10}$

$$x \leq 1 - \frac{1}{10} \vee x \geq 1 + \frac{1}{10} \Rightarrow x \leq \frac{9}{10} \vee x \geq \frac{11}{10}$$

$x \approx 1$ Fenomeno cancellazione

2) Data la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ e il metodo delle corde

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m}, \quad k \geq 0, m \neq 0,$$

trovare il valore di $m \in \{\pm 1, \pm 2\}$ per i quali il metodo converge (localmente) all'unica radice $\alpha \in \mathbb{N}$ di f. Per il valore di m trovato discutere la convergenza e l'ordine del metodo iterativo al variare di $x_0 \in [0, 2]$.

MILANO Matteo
15/9/2017

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{m} \qquad g'(x) = 1 - \frac{3x^2 - 6x}{m}$$

$$f(x) = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 1 \pm \sqrt{3} \notin \mathbb{N} \quad \Rightarrow \alpha = 1$$

$$g'(1) = 1 - \frac{-3}{m} = 1 + \frac{3}{m} \quad \begin{cases} m = 1 & g'(1) = 4 \\ m = -1 & g'(1) = -2 \\ m = 2 & g'(1) = \frac{5}{2} \\ m = -2 & g'(1) = -\frac{1}{2} \leftarrow \end{cases}$$

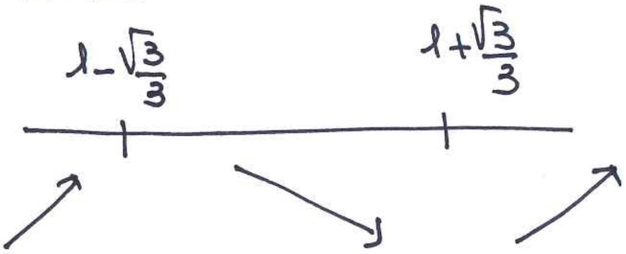
$m = -2 \qquad |g'(\alpha = 1)| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Cond. Suff. convergenza

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{-2} = x + \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 2}{2} =$$

$$\frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x^2 + x + 1$$

$$g'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 \geq 0 \qquad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 6}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$g''(x) = 3x - 3 \geq 0 \quad x \geq 1 \quad F(1;1)$$

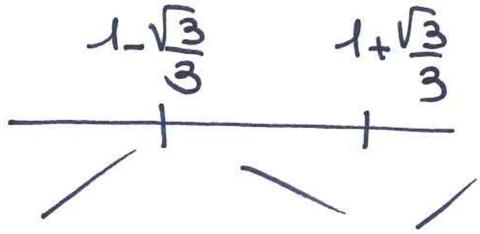
$$g\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{3} + \cancel{1} - \frac{\sqrt{3}}{9} - 3 + 2\sqrt{3} - \cancel{1} + 4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[2 + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right] =$$

$1 + \frac{\sqrt{3}}{9} < 2$. Per simmetria $g\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{9} > 0$

$$g'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 \geq 0 \qquad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$g\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{9} - 3\left(1 - 2\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\right) + 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[2 - \frac{10\sqrt{3}}{9} - \cancel{3} + 2\sqrt{3} - \cancel{1} + \cancel{4} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ 2 - \frac{10 - 18 + 6}{9}\sqrt{3}\right] = 1 + \frac{\sqrt{3}}{9} \qquad (< 2)$$

per simmetria

$$g\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{9} \qquad (> 0)$$

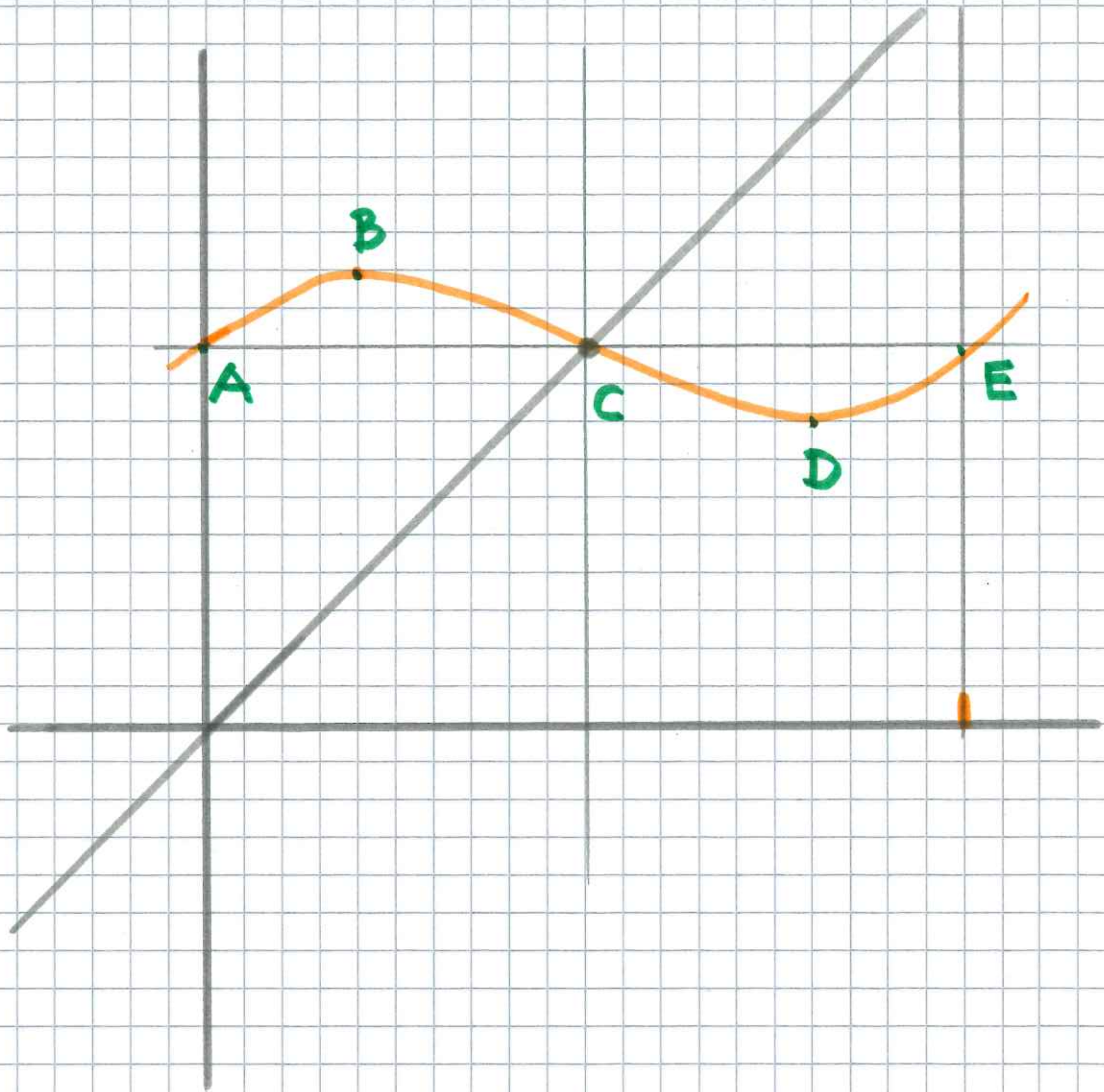
$A(0; 1)$

$B\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

$C(1, 1)$

$D\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, 1-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

$E(2, 1)$



$0 < x_0 < 1-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad 1 < x_1 < 1+\frac{\sqrt{3}}{9} < 1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

$1+\frac{\sqrt{3}}{3} < x_0 < 2 \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{\sqrt{3}}{3} < 1-\frac{\sqrt{3}}{9} < x_1 < 1$

$\forall\ 0 < x_0 < 2 \quad 1-\frac{\sqrt{3}}{9} < x_n < 1+\frac{\sqrt{3}}{9}$

$g'(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ convergenza non monotona

$x_n \to 1$ con ordine 1

garantita dalla c.suff.

3) Determinare α, β_1 e β_2 affinchè la formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \beta_1 f(\alpha) + \beta_2 f(3\alpha)$$

abbia grado di precisione almeno 2. Stabilire il grado di precisione della formula ottenuta.

Milano Matem

15|9|2017

- $r=0 \quad f=1$

$$\int_0^1 dx = 1 \qquad \beta_1+\beta_2=1$$

- $r=1 \quad f=x$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \qquad \beta_1\alpha + \beta_2\cdot 3\alpha = \frac{1}{2}$$

- $r=2 \quad f=x^2$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \qquad \beta_1\alpha^2 + \beta_2\cdot 9\alpha^2 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2=1 \\ \beta_1\alpha + 3\beta_2\alpha = \frac{1}{2} \\ \beta_1\alpha^2 + 9\beta_2\alpha^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = 1-\beta_2 \\ (1-\beta_2)\alpha + 3\alpha\,\beta_2 = \frac{1}{2} \\ (1-\beta_2)\alpha^2 + 9\alpha^2\beta_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha - \beta_2\alpha + 3\alpha\beta_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha^2 - \beta_2\alpha^2 + 9\beta_2\alpha^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + 2\alpha\beta_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha^2 + 8\alpha^2\beta_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_2 = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{4\alpha} - \frac{1}{2} \\ \alpha^2 + 8\alpha^2\left(\frac{1}{4\alpha} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{---} \\ \alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ 9\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \beta_1 = \frac{3}{4}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} f(1)$$

- $r=3 \quad f=x^3$?

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{4}(1)^3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{27} + \frac{1}{4} = \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \neq \frac{1}{4}$$

G. PREC. = 2

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} B & B \\ O & B \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

4.1) si dica se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti e, in caso affermativo, stabilire la relazione tra le velocità di convergenza dei due metodi;

4.2) studiare la convergenza del metodo iterativo

$$M\mathbf{x}^{k+1} = N\mathbf{x}^k + \mathbf{b}, \quad M = \begin{pmatrix} B & O \\ O & B \end{pmatrix}, \quad A = M - N.$$

MILANO Mate

15/9/2017

4.1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi

$$\det \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\lambda \end{bmatrix} = 2\lambda \cdot 2\lambda (4\lambda^2 - 1) - (4\lambda^2 - 1) = 0$$

$(4\lambda^2 - 1)^2 = 0 \qquad \lambda = \pm \frac{1}{2}$ (molt. 2)

$\rho(B_J) = \frac{1}{2} < 1$ converge

G. Seidel

$$\det \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & 2\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 2\lambda \end{bmatrix} = 2\lambda \cdot 2\lambda (4\lambda^2 - \lambda) - \lambda (4\lambda^2 - \lambda) = 0$$

$(4\lambda^2 - \lambda)^2 = 0 \qquad \lambda = 0 \quad \lambda = \frac{1}{4}$ (molt. 2)

$\rho(B_{GS}) = \frac{1}{4}$

$R(B_{GS}) = 2\, R(B_J)$ GS ha velocità doppia rispetto J.

4.2)

Metodo iterativo, matrice iterazione $M^{-1}N$

$\det(M^{-1}N - \lambda I) = 0 \quad \det M^{-1}(N - \lambda M) = 0 \quad \underbrace{\det M^{-1}}_{\neq 0} \det(\lambda M - N) = 0$

$\neq 0$ è diag. domin....

$\det(\lambda M - N) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & 2\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 2\lambda \end{bmatrix} = 2\lambda \cdot 2\lambda (4\lambda^2 - \lambda^2) - \lambda(\lambda)(4\lambda^2 - \lambda^2) =$$

$4\lambda^2 \cdot 3\lambda^2 - \lambda^2 \cdot 3\lambda^2 = 9\lambda^4 = 0$

$\lambda = 0 \qquad \rho = 0$ convergenza in 1 iterazione (ottimale)

5) Dato il polinomio $p_3(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 2$ si costruisca il polinomio q_2 che interpola p_3 nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Esprimere il polinomio $r(x) = p_3(x) - q_2(x)$ utilizzando il teorema di rappresentazione dell'errore di interpolazione.

MI Mate
15/9/2017

x_i	0	1	3
y_i	-2	1	7

$$
\begin{array}{llccc}
0 & -2 = a_0 & & & \\
 & & 3 = a_1 & & \\
1 & 1 & & 0 = a_2 & \\
 & & \frac{6}{2} = 3 & & \\
3 & 7 & & &
\end{array}
$$

$q_2(x) = -2 + 3(x-0) + 0(x-0)(x-1) = 3x-2$ $\quad q_2 \in \mathbb{P}_1$

$[p_3(x) - q_2(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 2 - 3x + 2 = x^3 - 4x^2 + 3x]$ (per verifica!)

E' richiesto di esprimere $r(x)$ con la formula data dal teorema di rapp. dell'errore di interpolazione

$n=2 \quad n+1=3 \quad \omega(x) = x(x-1)(x-3) = x(x^2-4x+3) = x^3 - 4x^2 + 3x$

$f(t) = t^3 - 4t^2 + 6t - 2 \quad f'(t) = 3t^2 - 8t + 6 \quad f''(t) = 6t - 8 \quad f'''(t) = 6$

$p_3(x) - q_2(x) = \frac{1}{3!}(x^3 - 4x^2 + 3x) \cdot 6 = x^3 - 4x^2 + 3x$