CALCOLO NUMERICO 1 (15 settembre 2017)

1) Calcolare, al variare di $x \neq 0$ il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione
$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$
e stabilire per quali x risulta essere $K_f(x) \leq 10$. Commentare il risultato ottenuto.

2) Data la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ e il metodo delle corde
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m}, \; k \geq 0, m \neq 0,$$
trovare il valore di $m \in \{\pm 1, \; \pm 2\}$ per i quali il metodo converge (localmente) all'unica radice $\alpha \in \mathbb{N}$ di f. Per il valore di m trovato discutere la convergenza e l'ordine del metodo iterativo al variare di $x_0 \in [0, 2]$.

3) Determinare α, β_1 e β_2 affinchè la formula di quadratura
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \beta_1 f(\alpha) + \beta_2 f(3\alpha)$$
abbia grado di precisione almeno 2. Stabilire il grado di precisione della formula ottenuta.

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con
$$A = \begin{pmatrix} B & B \\ O & B \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

4.1) si dica se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti e, in caso affermativo, stabilire la relazione tra le velocità di convergenza dei due metodi;

4.2) studiare la convergenza del metodo iterativo
$$M\mathbf{x}^{k+1} = N\mathbf{x}^k + \mathbf{f}, \; M = \begin{pmatrix} B & O \\ O & B \end{pmatrix}, \; A = M - N.$$

5) Dato il polinomio $p_3(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 2$ si costruisca il polinomio q_2 che interpola p_3 nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Esprimere il polinomio $r(x) = p_3(x) - q_2(x)$ utilizzando il teorema di rappresentazione dell'errore di interpolazione.