Cognome: ______________ Nome: ______________ Matricola: __________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 18 settembre 2017

1) È dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2) \equiv x_1^2 + x_2^2 - 1 & = 0 \\ F_2(x_1,x_2) \equiv 4x_1^2 - 4x_2 - 1 & = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni esatte sono $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Per l'approssimazione della soluzione appartenente al primo quadrante $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$:

1.1) porre $x_1 = \cos u$, $x_2 = \sin u$ (si osservi che la prima equazione è soddisfatta per ogni valore di u);

1.2) applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare

$$g(u) \equiv 4\cos^2 u - 4\sin u - 1 = 0$$

avente soluzioni $u = \frac{\pi}{6}$, appartenente al primo quadrante e corrispondente a $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, e $u = \frac{5\pi}{6}$, appartenente al secondo quadrante e corrispondente a $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Si utilizzi $u^{(0)} = 1$ e test d'arresto

$$R^{(n)} \equiv \|\mathbf{F}(\cos u^{(n)}, \sin u^{(n)})\|_2 < 10^{-8},$$

dove $\mathbf{F}(\cdot,\cdot) = (F_1(\cdot,\cdot), F_2(\cdot,\cdot))$. Sia `nit` il numero di iterazioni eseguite.

RISULTATI

`nit` $=$ $\quad$ $u^{(\mathtt{nit})} =$ $\quad$ $R^{(\mathtt{nit})} =$ $\quad$ $|u^{(\mathtt{nit})} - \frac{\pi}{6}| =$

2) Si considerino le matrici 50×50

$$A_{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 2\alpha & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{\alpha} \\ -1 & 2\alpha & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2\alpha & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2\alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2\alpha & -1 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad P_{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

e il sistema lineare $A_{(\alpha)}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $b_i = 100, \forall i = 1,...,50$ e $\alpha = 2, 4, 8$.

Per la risoluzione del sistema lineare si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - P_{(\alpha)}^{-1}A_{(\alpha)})\mathbf{x}^{(k)} + P_{(\alpha)}^{-1}\mathbf{b}, \quad k \geq 0, \quad \mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0...0]^T,$$

avente matrice di iterazione $B_{(\alpha)}) = I - P_{(\alpha)}^{-1}A_{(\alpha)}$. Calcolare il raggio spettrale $\rho(B_{(\alpha)})$ della matrice di iterazione e il numero di iterazioni $\widehat{K}$ necessarie affinchè

$$T^{(\widehat{K})} \equiv \|\mathbf{x}^{(\widehat{K})} - \mathbf{x}^{(\widehat{K}-1)}\|_\infty \leq 10^{-6}.$$

Riportare nella tabella i valori di $\rho(B_{(\alpha)})$, $\widehat{K}$, $\mathbf{x}_1^{(\widehat{K})}$ (prima componente del vettore soluzione $\mathbf{x}^{(\widehat{K})}$) e $T^{(\widehat{K})}$.

	$\rho(B_{(\alpha)})$	$\widehat{K}$	$\mathbf{x}_1^{(\widehat{K})}$	$T^{(\widehat{K})}$
$\alpha = 2$				
$\alpha = 4$				
$\alpha = 8$				

3) Si consideri la funzione

$$g(x) = x^3(1-x)^3\cos(x)$$

e il corrispondente integrale

$$I_g = \int_0^1 g(x)\,dx = 648\sin(1) - 708\cos^2(1/2).$$

Si calcoli numericamente I_g (sia I_{gr} l'approssimazione ottenuta) tramite il metodo dei rettangoli composito, che approssima l'integrale I di una funzione $f(x)$ su $[a,b]$ con la formula

$$I_{gr} \simeq \sum_{k=1}^{n} h f(x_k),$$

con n numero di sottointervalli uguali di ampiezza h e $x_k = a + (k-1)h$, $k = 1,\ldots,n$.

Nel calcolo, si usi successivamente un numero di intervalli $n = 2^j$, $j = 3,\ldots,9$, e si determini in corrispondenza di ciascun valore di n l'errore $|I_g - I_{gr}|$. Si deduca quindi, tracciando un grafico in scala logaritmica dell'errore in funzione del numero di intervalli, il valore di p tale per cui si ha che

$$|I_g - I_{gr}| \leq \frac{C}{n^p},$$

dove C è una costante che non dipende da n. Tale risultato è atteso? Si commenti.

RISULTATI

$p =$

commento: