CALCOLO NUMERICO 1 (17 settembre 2018) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Indicare per quali valori di x_0 e x_1 esiste uno ed unico polinomio di terzo grado p_3 tale che

$$p_3(0) = f(0), \quad p_3(x_0) = f(x_0), \quad p_3'(x_0) = f'(x_0), \quad p_3'(x_1) = f'(x_1),$$

per ogni $f \in C^1(\mathbb{R})$.

$p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad p_3'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p_3(0) = d = f(0)$

$p_3(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = f(x_0)$

$p_3'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = f'(x_0)$

$p_3'(x_1) = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c = f'(x_1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ 3x_0^2 & 2x_0 & 1 & 0 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(x_0) \\ f'(x_0) \\ f'(x_1) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} A\underline{x} = \underline{f} \\ \det A \neq 0 \end{matrix}$$

$$-\begin{vmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 \\ 3x_0^2 & 2x_0 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x_0^3(2x_0 - 2x_1) - x_0^2(3x_0^2 - 3x_1^2) + x_0(6x_0^2x_1 - 6x_0x_1^2)$$

$$= x_0\left[x_0^2 \cdot 2(x_0 - x_1) - x_0 \cdot 3(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) + x_0x_1 \cdot 6(x_0 - x_1)\right]$$

$$= x_0^2 \cdot (x_0 - x_1)(2x_0 - 3x_0 - 3x_1 + 6x_1) =$$

$$= x_0^2 (x_0 - x_1)\left[-x_0 + 3x_1\right] \neq 0$$

$$x_0 \neq 0 \wedge x_0 \neq x_1 \wedge x_0 \neq 3x_1$$

2) Studiare la convergenza del metodo iterativo

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 6}{7}, \quad k \geq 0,$$

al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$. Nel caso di convergenza determinare l'ordine del metodo. Fornire poi una condizione sufficiente su x_0 tale che il metodo risulti convergente.

MILANO
17.09.18

$g(x) = \dfrac{x^3+6}{7}$ $\qquad g(x) = x$

$x^3 + 6 = 7x \qquad x^3 - 7x + 6 = 0$

$g(0) = \frac{6}{7}$

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0

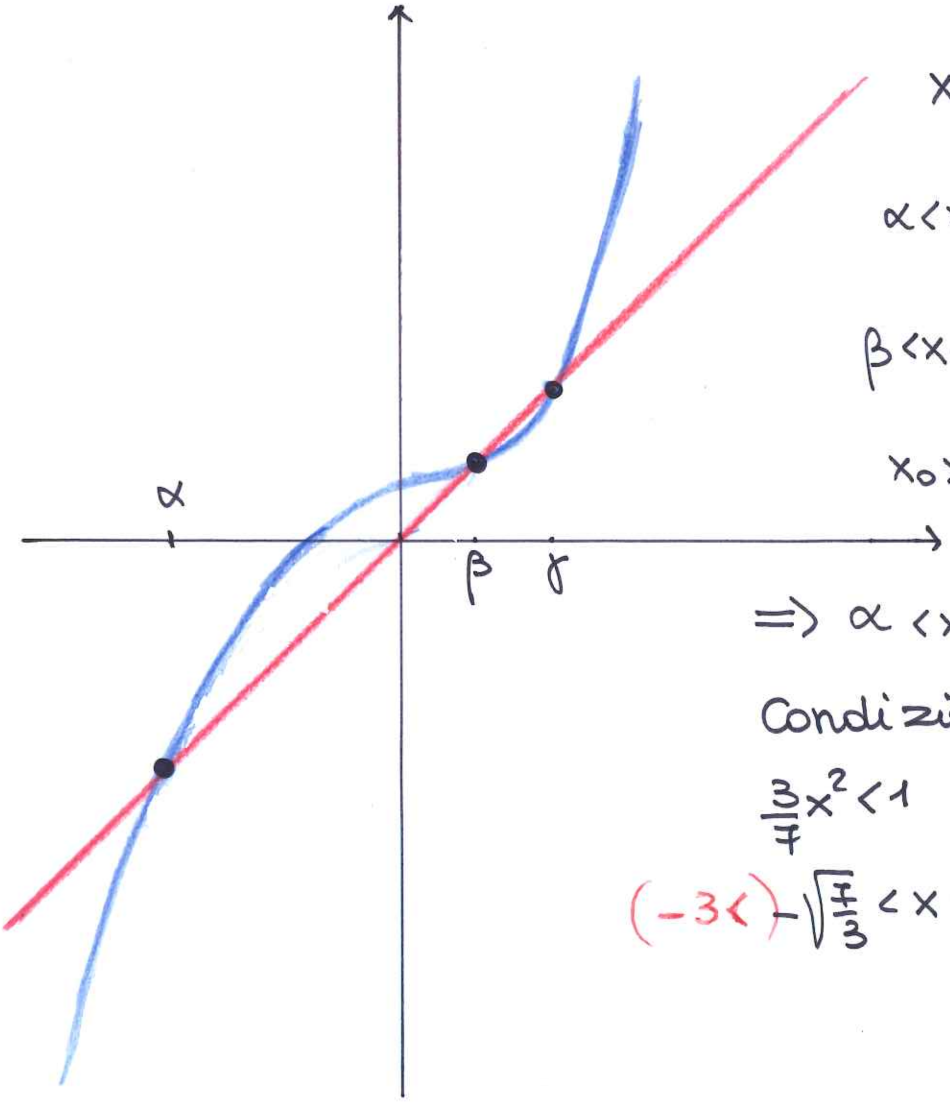
$(x-1)(x-2)(x+3) = 0 \qquad \alpha = -3, \ \beta = 1, \ \gamma = 2$

$g'(x) = \frac{3}{7}x^2 > 0 \qquad x \neq 0 \qquad g'(0) = 0$

$g''(x) = \frac{6}{7}x > 0 \qquad x > 0 \qquad F\left(0; \frac{6}{7}\right)$

$g'(-3) = \frac{27}{7} > 1$ $\qquad g'(1) = \frac{3}{7} < 1$ $\qquad g'(2) = \frac{8}{7} > 1$

NO CONV. $\qquad$ CONV. ORD 1 $\qquad$ NO CONV.



$x_0 < \alpha$ succ. mon. decresc.
$x_n \searrow -\infty$

$\alpha < x_0 < \beta$ succ. mon. cresc.
$x_n \nearrow \beta$

$\beta < x_0 < \gamma$ succ. mon decr.
$x_n \searrow \beta$

$x_0 > \gamma$ succ. mon. cresc.
$x_n \nearrow +\infty$

$\Rightarrow \alpha < x_0 < \gamma \Rightarrow x_0 \to \beta$

Condizione sufficiente:

$\frac{3}{7}x^2 < 1 \qquad x^2 < \frac{7}{3}$

$(-3 <) -\sqrt{\frac{7}{3}} < x < \sqrt{\frac{7}{3}} (< 2)$

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 2a & 1 \\ 0 & 1 & 2a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ tale che } A \text{ sia non singolare:}$$

MI MATE
17.9.18

3.1) determinare per quali valori di a la matrice A è diagonalmente dominante;

3.2) determinare per quali valori di a la matrice A è definita positiva;

3.3) determinare per quali valori di a il metodo di Jacobi risulta convergente;

3.4) calcolare le matrici triangolari L e U della fattorizzazione $A = LU$ (senza pivoting) e determinare per quali valori di a risultano uguali gli elementi U_{22} e U_{33} della matrice U.

$$\det A = a(4a^2-1) - 2a = a(4a^2-3) = 0 \qquad \underbrace{a = 0 \lor a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}_{A \text{ singolare}}$$

3.1) diag. dom. $\begin{cases} |a| > 1 \\ |2a| > 2 \\ |2a| > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |a| > 1 \\ |a| > 1 \\ |a| > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow |a| > 1$

3.2) def. pos. $\begin{cases} a > 0 \\ 2a^2 - 1 > 0 \\ \det A > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a < -\frac{1}{\sqrt{2}} \lor a > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 0 \lor a > \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow a > \frac{\sqrt{3}}{2}$

3.3) $\det \begin{bmatrix} a\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2a\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2a\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad a\lambda(4a^2\lambda^2 - 1) - 2a\lambda = a\lambda(4a^2 - 1 - 2) = 0$

$\lambda = 0 \lor \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2a}$

$\rho(B_J) = \frac{\sqrt{3}}{2|a|} < 1 \qquad |a| > \frac{\sqrt{3}}{2}$

3.4) $m_{21} = \frac{1}{a} \qquad a_{22} = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2-1}{a} \qquad a_{23} = 1 \; ; \; m_{31} = 0$

$m_{32} = \frac{a}{2a^2-1} \; ; \; a_{33} = 2a - \frac{a}{2a^2-1} = \frac{4a^3 - 3a}{2a^2-1}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2a^2-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2a^2-1}{a} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4a^3-3a}{2a^2-1} \end{bmatrix}$$

$U_{22} = U_{33} \qquad \frac{2a^2-1}{a} = \frac{4a^3-3a}{2a^2-1} \Rightarrow \cancel{4a^4} - 4a^2 + 1 = \cancel{4a^4} - 3a^2$

$a^2 = 1 \qquad a = \pm 1$

4) Calcolare il numero di condizionamento $K_T(x)$ del polinomio di Chebyshev di secondo grado $T_2(x)$ e stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ il calcolo del polinomio è ben condizionato, nel senso che $K_T(x) < 10$.

MI Mate 17.9.18

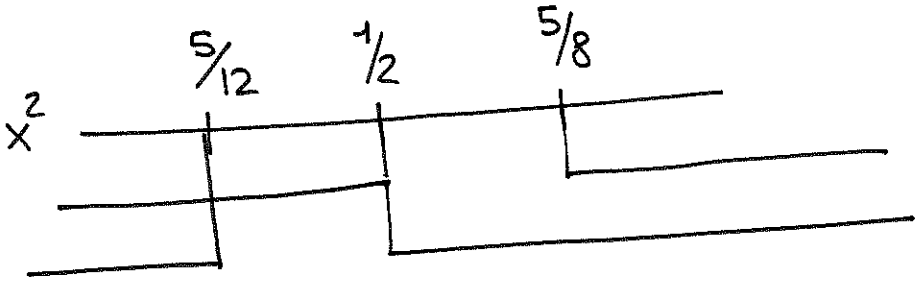
$$T_2(x) = 2x\,T_1(x) - T_0(x) = 2x^2-1$$

$$K_T(x) = \frac{|x\,T_2'(x)|}{|T_2(x)|} \qquad T_2'(x) = 4x$$

$$K_T(x) = \left|\frac{x \cdot 4x}{2x^2-1}\right| = \frac{4x^2}{|2x^2-1|} < 10 \qquad \frac{2x^2}{|2x^2-1|} < 5$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{2x^2-1} < 5 \\[2ex] \dfrac{2x^2}{2x^2-1} > -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x^2-10x^2+5}{2x^2-1} < 0 \\[2ex] \dfrac{2x^2+10x^2-5}{2x^2-1} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{+8x^2-5}{2x^2-1} > 0 \\[2ex] \dfrac{12x^2-5}{2x^2-1} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 < \frac{1}{2} \cup x^2 > \frac{5}{8} \\[1ex] x^2 < \frac{5}{12} \cup x^2 > \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$x^2 < \frac{5}{12} \quad \cup \quad x^2 > \frac{5}{8}$$

$$x < -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \;\cup\; -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} < x < \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \;\cup\; x > \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$