CALCOLO NUMERICO 1 (17 settembre 2018) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Indicare per quali valori di x_0 e x_1 esiste uno ed unico polinomio di terzo grado p_3 tale che

$$p_3(0) = f(0), \quad p_3(x_0) = f(x_0), \quad p_3'(x_0) = f'(x_0), \quad p_3'(x_1) = f'(x_1),$$

per ogni $f \in C^1(\mathbb{R})$.

2) Studiare la convergenza del metodo iterativo

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 6}{7}, \; k \geq 0,$$

al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$. Nel caso di convergenza determinare l'ordine del metodo. Fornire poi una condizione sufficiente su x_0 tale che il metodo risulti convergente.

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 2a & 1 \\ 0 & 1 & 2a \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ tale che } A \text{ sia non singolare :}$$

3.1) determinare per quali valori di a la matrice A è diagonalmente dominante;

3.2) determinare per quali valori di a la matrice A è definita positiva;

3.3) determinare per quali valori di a il metodo di Jacobi risulta convergente;

3.4) calcolare le matrici triangolari L e U della fattorizzazione $A = LU$ (senza pivoting) e determinare per quali valori di a risultano uguali gli elementi U_{22} e U_{33} della matrice U.

4) Calcolare il numero di condizionamento $K_T(x)$ del polinomio di Chebyshev di secondo grado $T_2(x)$ e stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ il calcolo del polinomio è ben condizionato, nel senso che $K_T(x) < 10$.

5) Siano A e P due matrici simmetriche e definite positive. Dalla decomposizione $A = P - N$ dedurre il seguente metodo iterativo (I matrice identità), per il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - P^{-1}A)\mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{b}.$$

Gli autovalori λ_i della matrice $P^{-1}A$ sono positivi, sia λ_{max} il loro massimo: dimostrare che il metodo converge se e solo se $\lambda_{max} < 2$.