Cognome: ______________ Nome: ______________ Matricola: __________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 18 settembre 2018

1) Sia data la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x$$

e sia α il valore del suo unico zero. Si consideri il risultato ottenuto dalla function Matlab `fzero` come valore esatto di α.

1.1) Dopo averne verificato le ipotesi di applicabilità, si utilizzi il metodo di bisezione per approssimare lo zero di $f(x)$, prendendo come estremi iniziali $a = 0, b = 1$ e $toll = 10^{-6}$.
Quante iterazioni sono necessarie? __________

1.2) Si implementi ora la seguente variante del metodo di bisezione, detta metodo della *falsa posizione*: sia $a < \alpha < b$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. Si ponga $a_0 = a, b_0 = b$ e per $k = 0, 1, 2,$ si calcoli l'iterazione

$$x_{k+1} = a_k - f(a_k) \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}$$

Ad ogni iterazione si definisca un nuovo intervallo di ricerca come:

- se $f(a_k) \cdot f(x_{k+1}) \leq 0$, si ponga $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_{k+1}$
- se $f(a_k) \cdot f(x_{k+1}) > 0$, si ponga $a_{k+1} = x_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$.

Si approssimi nuovamente lo zero di $f(x)$ con il metodo della falsa posizione partendo da $a = 0, b = 1$ e si usi come test d'arresto la condizione $||x_{k+1} - x_k||/||x_k|| \leq toll$.
Quante iterazioni sono necessarie in questo caso? __________

1.3) Quale è l'errore assoluto effettivamente commesso nei due casi? Si utilizzi un formato esponenziale.
Bisezione: ______________ Falsa posizione: ______________

2) Data la funzione $f(x) = \exp(\frac{x}{4}) \sin^2 x$ e l'intervallo $[-4, 4]$, sia S_m la spline lineare interpolante f in $m + 1$ nodi equispaziati di $[-4, 4]$, con $m = 2, 2^2, 2^3, 2^4, ...$ e si consideri l'errore di interpolazione

$$E_m \equiv ||f - S_m||_\infty,$$

avendo posto, per ogni funzione g definita sull'intervallo [-4,4]:

$$||g||_\infty = \max_{0 \leq j \leq 800} |g(z_j)|, \quad z_j = -4 + jh, \; j = 0, ..., 800, \; h = \frac{1}{100}.$$

Trovare sperimentalmente il minimo valore M del numero di intervalli m per il quale si verifica

$$E_M < 10^{-6}.$$

RISULTATI: $M =$ $\qquad\qquad$ $E_M =$

3) Per ogni $n = 2, 3, 4, ..., 15$ si considerino n nodi equispaziati x_i, $i = 1, ..., n$ sull'intervallo $[0, 1]$ e la matrice di Vandermonde $V(n)$ associata ad ogni insieme di nodi. Sia $K(n)$ il numero di condizionamento in norma infinito della matrice $V(n)$. Ipotizzando una relazione esponenziale fra n e $K(n)$ del tipo:

$$K(n) = C\ 2^{\alpha n}, \quad \alpha > 0,$$

si trovi sperimentalmente il valore di α osservando che

$$\frac{K(n)}{K(n-1)} = \frac{2^{\alpha n}}{2^{\alpha(n-1)}} = 2^{\alpha}, \quad \text{da cui si ottiene} : \alpha \approx \log_2 \frac{K(n)}{K(n-1)}.$$

Per ogni $n = 3, 4, ..., 15$ calcolare i rapporti

$$r(n) = \log_2 \frac{K(n)}{K(n-1)},$$

e dedurre il valore teorico di α.

RISULTATI: Valore teorico di α:

n	$K(n)$	$r(n)$
5		
10		
15		