1) Indicare per quali valori di x_0 e $x_1 \in \mathbb{R}$ esiste uno ed unico polinomio p_3 di grado 3 tale che

$$p_3(x_0) = f(x_0), \quad p_3'(x_0) = f'(x_0), \quad p_3(x_1) = f(x_1), \quad p_3'(x_1) = f'(x_1),$$

per ogni $f \in C^1(\mathbb{R})$.

23|9|2019

Mate MI

1° modo: $p_3(x) = a(x-x_0)^3 + b(x-x_0)^2 + c(x-x_0) + d$

$p_3'(x) = 3a(x-x_0)^2 + 2b(x-x_0) + c$

$$\begin{cases} p_3(x_0) = d = f(x_0) \\ p_3'(x_0) = c = f'(x_0) \\ p_3(x_1) = a(x_1-x_0)^3 + b(x_1-x_0)^2 + c(x_1-x_0) + d = f(x_1) \\ p_3'(x_1) = 3a(x_1-x_0)^2 + 2b(x_1-x_0) + c = f'(x_1) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (x_1-x_0)^3 & (x_1-x_0)^2 & (x_1-x_0) & 1 \\ 3(x_1-x_0)^2 & 2(x_1-x_0) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ f(x_1) \\ f'(x_1) \end{bmatrix}$$

$A\underline{u} = \underline{F}$ $\qquad \det A \neq 0$

$$(x_1-x_0)^3 \cdot 2(x_1-x_0) - 3(x_1-x_0)^2 \cdot (x_1-x_0)^2 \neq 0$$

$(x_1-x_0)^4 \neq 0 \qquad x_1 \neq x_0$

2° modo

$p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p_3'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p_3(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = f(x_0)$

$p_3(x_1) = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = f(x_1)$

$p_3'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = f'(x_0)$

$p_3'(x_1) = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c = f'(x_1)$

$$\begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ 3x_0^2 & 2x_0 & 1 & 0 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f'(x_0) \\ f'(x_1) \end{bmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 \\ 3x_0^2 & 2x_0 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 \\ 3x_0^2 & 2x_0 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\left[x_1^3(2x_0-2x_1) - 3x_0^2(\underbrace{x_1^2-2x_1^2}_{-x_1^2}) + 3x_1^2(x_1^2-2x_0x_1)\right] +$$

$$\left[x_0^3(2x_0-2x_1) - 3x_0^2(x_0^2-2x_0x_1) + 3x_1^2(\underbrace{x_0^2-2x_0^2}_{-x_0^2})\right] =$$

$$= -2x_0x_1^3 + 2x_1^4 - 3x_0^2x_1^2 - 3x_1^4 + 6x_0x_1^3 + 2x_0^4 - 2x_0^3x_1$$
$$-3x_0^4 + 6x_0^3x_1 - 3x_1^2x_0^2$$

$$-x_0^4 + 4x_0^3x_1 - 6x_0^2x_1^2 + 4x_0x_1^3 - x_1^4 =$$

$$-(x_0-x_1)^4 \neq 0 \iff x_0 \neq x_1$$

2) Verificare che la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{3}} - x,$$

ha una sola radice reale $z \in [0,1]$. Stabilire se le iterazioni di punto fisso

$$x_{n+1} = \phi_i(x_n),\ n \geq 0,\ i = 1, 2,\ x_0 \in [0,1],$$

possono convergere a z, e, nel caso convergano, studiarne la convergenza e l' ordine di convergenza, dove

$$\phi_1(x) = \ln(x) + x + \frac{x^2}{3},\quad \phi_2(x) = e^{-\frac{x^2}{3}}.$$

MI MATE 23.9.19

$e^{-\frac{x^2}{3}} - x = 0 \qquad f(x) = 0$

$f(0) = 1$; $f(1) = e^{-\frac{1}{3}} - 1 < 0 \qquad f'(x) = -\frac{2}{3} x e^{-\frac{x^2}{3}} - 1 < 0 \quad x \in [0,1]$

$\Rightarrow \exists!\ z \in [0,1]$ tale che $f(z) = 0$

1) $\phi_1(x) = \ln x + x + \frac{x^2}{3}$; $x > 0$: $\cancel{x} = \ln x + \cancel{x} + \frac{x^2}{3} \qquad x = e^{-\frac{x^2}{3}} \Rightarrow f(x) = 0$

$\phi_1'(x) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{2}{3}x > 1 \quad x \in (0,1]$ [Divergenza locale $|g'(z)| > 1$]

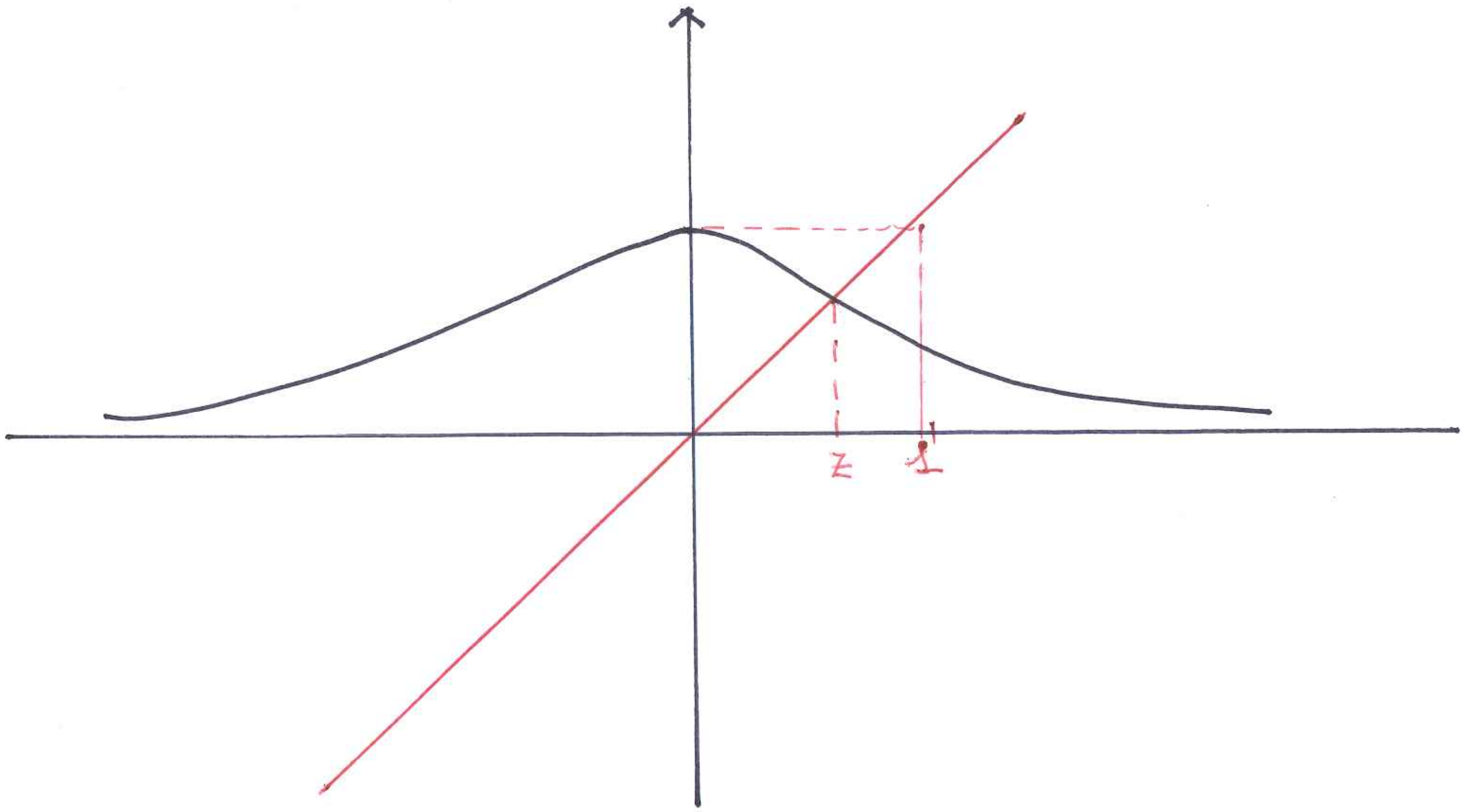
2) $\phi_2(x) = e^{-\frac{x^2}{3}}$

$\phi_2'(x) = -\frac{2}{3} x e^{-\frac{x^2}{3}} \qquad \phi_2'(0) = 0 < 1 \quad |\phi_2'(1)| = |-\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}}| < 1$

$\phi''(x) = -\frac{2}{3}\left[e^{-\frac{x^2}{3}} + x \cdot \left(-\frac{2}{3}x\right) e^{-\frac{x^2}{3}}\right] = +\underbrace{\frac{2}{3} e^{-\frac{x^2}{3}}}_{>0\ \forall x \in \mathbb{R}} \underbrace{\left(\frac{2}{3}x^2 - 1\right)}_{<0\quad x \in [0,1]}$

ϕ_2' è decrescente $\Rightarrow \quad 0 = \phi_2'(0) > \phi_2'(x) > \phi_2'(1) > -1$

$x \in (0,1)$



$0 \leq x_0 \leq 1$ Convergenza in modo "non monotono"

a $z \in (0,1)$, 1° ordine

$\forall n$, se $x_n > z \Rightarrow x_{n+1} < z \dots\dots$

$x_0 \in [0,1]$ $x_1 \in (0,1]$ $x_2 \in (0,1)$ $\dots\dots$

Teorema di convergenza:
Sia $\phi \in C^1[a,b]$, $a \leq \phi(x) \leq b$ $\forall x \in [a,b]$; $x_0 \in [a,b]$, $C \in \mathbb{R}^+$. Se $|\phi'(x)| \leq C < 1$ $\forall x \in [a,b]$

allora l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $k \geq 0$, converge all'unico punto fisso di ϕ nell'intervallo $[a,b]$.

3) Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & 2 \\ \alpha & 2 & 8 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

2.1) determinare tutti e soli i valori di α per i quali la matrice è definita positiva;

2.2) determinare tutti e soli i valori di α per i quali il metodo di Jacobi converge;

2.3) determinare tutti e soli i valori di α per i quali il metodo di Gauss-Seidel converge.

MI recate

23.9.19

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & 2 \\ \alpha & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad a_{11} > 0, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\det A = 5 \cdot (24 - 4) + \alpha(-3\alpha) = 100 - 3\alpha^2 > 0$$

$$\alpha^2 < \frac{100}{3} \qquad |\alpha| < \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Jacobi

$$\begin{vmatrix} 5\lambda & 0 & \alpha \\ 0 & 3\lambda & 2 \\ \alpha & 2 & 8\lambda \end{vmatrix} = 5\lambda(24\lambda^2 - 4) + \alpha(-3\alpha\lambda) =$$

$$120\lambda^3 - 20\lambda - 3\alpha^2\lambda =$$

$$\lambda(120\lambda^2 - 20 - 3\alpha^2) = 0 \qquad \lambda = 0$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{20 + 3\alpha^2}}{\sqrt{120}}$$

$$\rho(B_J) = \sqrt{\frac{3\alpha^2 + 20}{120}} < 1 \qquad 3\alpha^2 < 100 \qquad \alpha^2 < \frac{100}{3}$$

$$|\alpha| < \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Gauss - Seidel

$$\begin{vmatrix} 5\lambda & 0 & \alpha \\ 0 & 3\lambda & 2 \\ \alpha\lambda & 2\lambda & 8\lambda \end{vmatrix} = 5\lambda(24\lambda^2 - 4\lambda) + \alpha\lambda(-3\alpha\lambda) =$$

$$= \lambda^2(120\lambda - 20 - 3\alpha^2) = 0$$

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = \frac{20 + 3\alpha^2}{120} \qquad \rho = \frac{20 + 3\alpha^2}{120} < 1 \qquad |\alpha| < \frac{10}{\sqrt{3}}$$

4) Sia data una formula di quadratura su $[-1,1]$ basata sui tre nodi $x_1 = -a$, $x_2 = 0$ e $x_3 = a$ $(a > 0)$.

4.1) Determinare i pesi della formula di quadratura in funzione di a in modo tale che il grado di precisione sia almeno 3.

4.2) Determinare il valore di a in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo.

4.3) Stabilire se la formula ottenuta al punto 4.2) è di tipo Gaussiano.

Mi Mate 23.9.19

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \omega_1 f(-a) + \omega_2 f(0) + \omega_3 f(a)$$

4.1)

$r=0 \quad f=1 \quad \int_{-1}^{1} dx = 2 \qquad \omega_1+\omega_2+\omega_3 = 2$

$r=1 \quad f=x \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \qquad \omega_1(-a)+\omega_3(a)=0 \Rightarrow \omega_1=\omega_3$

$r=2 \quad f=x^2 \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \qquad \omega_1 a^2 + \omega_3 a^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \omega_1+\omega_3 = \frac{2}{3a^2}$

$$\begin{cases} \omega_1+\omega_2+\omega_3=2 \\ \omega_1=\omega_3 \\ \omega_1+\omega_3 = \frac{2}{3a^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\omega_1+\omega_2=2 \\ \omega_1=\omega_3 \\ 2\omega_1 = \frac{2}{3a^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_2 = 2-\frac{2}{3a^2} \\ \omega_3 = \frac{1}{3a^2} \\ \omega_1 = \frac{1}{3a^2} \end{cases}$$

Con questi pesi si ha anche:

$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \qquad \frac{1}{3a^2}(-a^3) + \frac{1}{3a^2}(a^3) = 0 \Rightarrow$ G.P. 3

4.2) $r=4 \quad f=x^4$

$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5} \qquad \frac{1}{3a^2}\cdot a^4 + \frac{1}{3a^2}a^4 = \frac{2}{5} \qquad \frac{a^2}{3} = \frac{1}{5},\ a^2 = \frac{3}{5},\ a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$\omega_1 = \omega_3 = \frac{5}{9} \qquad \omega_2 = 2 - \frac{2}{3\cdot\frac{3}{5}} = \frac{8}{9}$

Inoltre, per la simmetria: GP $= 5$

4.3) E' la FQ. Gauss-Legendre a 3 nodi

(Grado $2\cdot n-1 = 2\cdot 3 - 1 = 5$)