CALCOLO NUMERICO 1 (23 settembre 2019) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Indicare per quali valori di x_0 e $x_1 \in \mathbb{R}$ esiste uno ed unico polinomio p_3 di grado 3 tale che

$$p_3(x_0) = f(x_0), \quad p_3'(x_0) = f'(x_0), \quad p_3(x_1) = f(x_1), \quad p_3'(x_1) = f'(x_1),$$

per ogni $f \in C^1(\mathbb{R})$.

2) Verificare che la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{3}} - x,$$

ha una sola radice reale $z \in [0,1]$. Stabilire se le iterazioni di punto fisso

$$x_{n+1} = \phi_i(x_n), \; n \geq 0, \; i = 1, 2, \; x_0 \in [0,1],$$

possono convergere a z, e, nel caso convergano, studiarne la convergenza e l' ordine di convergenza, dove

$$\phi_1(x) = \ln(x) + x + \frac{x^2}{3}, \quad \phi_2(x) = e^{-\frac{x^2}{3}}.$$

3) Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & 2 \\ \alpha & 2 & 8 \end{bmatrix}, \; \alpha \in \mathbb{R},$$

2.1) determinare tutti e soli i valori di α per i quali la matrice è definita positiva;

2.2) determinare tutti e soli i valori di α per i quali il metodo di Jacobi converge;

2.3) determinare tutti e soli i valori di α per i quali il metodo di Gauss-Seidel converge.

4) Sia data una formula di quadratura su $[-1,1]$ basata sui tre nodi $x_1 = -a$, $x_2 = 0$ e $x_3 = a$ $(a > 0)$.

4.1) Determinare i pesi della formula di quadratura in funzione di a in modo tale che il grado di precisione sia almeno 3.

4.2) Determinare il valore di a in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo.

4.3) Stabilire se la formula ottenuta al punto 4.2) è di tipo Gaussiano.

5) Siano $p(x)$ un polinomio di grado $n \geq 1$, $T_N(p)$ il valore della formula di quadratura composita dei trapezi ottenuta con una suddivisione uniforme dell'intervallo $[0,1]$ con $N > 1$ sottointervalli. Esiste un valore N per cui

$$\int_0^1 p(x)dx \; = \; T_N(p)?$$