Cognome: ____________ Nome: ____________ Matricola: ____________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - settembre 2019

1) Siano date le curve

$$C_1: \qquad 3y - 4x = 0$$
$$C_2: \qquad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

1.1) Calcolare analiticamente le ascisse dei due punti di intersezione delle curve C_1 e C_2. Siano essi P_1 e P_2, essendo P_1 il punto di ascissa inferiore.

1.2) Approssimare le ascisse dei punti di intersezione utilizzando il metodo di Newton, servendosi delle eventuali simmetrie riscontrate. A tale scopo utilizzare i parametri `toll=1e-4, nmax=300` e il valore di innesco `x0=0.4`, scegliendo come test di arresto il valore assoluto della differenza tra due iterate successive.

1.3) Calcolare il modulo dell'errore assoluto commesso.

RISULTATI

Valori analitici:

P_1= $\qquad\qquad$ P_2=

Valori approssimati ottenuti con il metodo di Newton:

$\tilde{P}_1$= $\qquad\qquad$ $\tilde{P}_2$=

Modulo dell'errore assoluto (`format long e`)=

2) Si vuole approssimare l'integrale definito (di cui non si conosce il valore esatto)

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

mediante le formule di quadratura del punto medio, trapezi e Simpson con M sottointervalli di uguale ampiezza.

Per ciascuno dei tre metodi: implementare una procedura che calcoli il valore approssimato I_M per $M = 2, 3, 4, ..., \widetilde{M}$ dove $\widetilde{M}$ è il minimo numero di sottointervalli per cui si verifica $|I_{\widetilde{M}} - I_{\widetilde{M}-1}| \leq 10^{-7}$. Si riporti anche (in `format short e`) la differenza in valore assoluto rispetto al valore I_Q ottenuto con la function Matlab `quad`.

Nota: per le formule di quadratura che richiedono il calcolo della funzione integranda in $x = 0$, si consideri come estremo inferiore dell'integrale definito il valore 10^{-10} anziché 0.

RISULTATI

	$\widetilde{M}$	$\lvert I_{\widetilde{M}} - I_Q\rvert$
punto medio		
trapezi		
Simpson		

3) Dato il sistema lineare $A_{[n]}\mathbf{x}_{[n]} = \mathbf{b}_{[n]}$ di dimensione n, con $n = 2^k$, $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10,$:

$$A_{[n]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & ... & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & ... & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{[n]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \ddots \\ n-2 \\ n-1 \\ n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{[n]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si risolva il sistema perturbato $\hat{A}_{[n]}\hat{\mathbf{x}}_{[n]} = \hat{\mathbf{b}}_{[n]}$, dove:

$\hat{A}_{[n]}(n, n) = n + 1$, $\hat{A}_{[n]}(i, j) = A_{[n]}(i, j)$ per ogni altra coppia di indici i, j;

$\hat{b}_{[n]}(n, 1) = n + \frac{1}{n}$, $\hat{b}_{[n]}(i, 1) = b_{[n]}(i, 1)$ per ogni altro indice i.

Calcolare il numero di condizionamento $K_\infty(A_{[n]})$ e la perturbazione sulla soluzione $\|\hat{\mathbf{x}}_{[n]} - \mathbf{x}_{[n]}\|_\infty$ al variare di n.
Ipotizzando che

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{\mathbf{x}}_{[n]} - \mathbf{x}_{[n]}\|_\infty = \ell, \quad K_\infty(A_{[n]}) = O(n^p),$$

quali sono i valori di ℓ e di p? A tale scopo si calcolino i rapporti $K_\infty(A_{[n]})/K_\infty(A_{[n/2]})$.
Riportare i valori nella tabella.

n	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
$\|\hat{\mathbf{x}}_{[n]} - \mathbf{x}_{[n]}\|_\infty$						
$K_\infty(A_{[n]})$						
$K_\infty(A_{[n]})/K_\infty(A_{[n/2]})$	——					

$\ell =$

$p =$ Commento: