RISULTATI DEGLI ESERCIZI SULLE EQUAZIONI NON LINEARI

TEMI D'ESAME DEI CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA

7 giugno 2005 - n. 3

$g\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -0.25 < 0,\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 0.070 > 0.$

$\Big[$Analogamente per simmetria si ottiene il risultato su $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)\Big]$.

$g(x) = 1.5 \sin x,\ g'(x) = 1.5 \cos x,\ g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow 0 < g'(x) < \frac{3}{4}.$

14 giugno 2005 - n. 1
$x = g(x),\ x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x},\ \frac{x}{2} = \frac{1}{x},\ x^2 - 2 = 0\ (x \neq 0).$
Si osservi la simmetria del problema.
Pertanto si riportano le soluzioni solo per $x > 0$.
Grafico di g: Asintoto verticale: $x = 0$; asintoto obliquo: $y = \frac{1}{2}x$; minimo $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; concavità rivolta verso l'alto.
Si ha un punto fisso: $\alpha = \sqrt{2}$.

$0 < x_0 < \alpha$: $x_1 > \alpha$. Si veda il caso successivo.
$x_0 > \alpha$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$.
$g'(x) = \frac{x^2-2}{2x^2} \Rightarrow g'(\alpha) = 0$, $g''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow g''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow 2^o$ ordine.

Per la discussione sul test d'arresto si vedano gli appunti pubblicati sul sito web.

14 luglio 2005 - n. 1
Grafico di g: Asintoto orizzontale per $x \to -\infty$: $y = 0$; sempre crescente; concavità rivolta verso l'alto per $x < 0$, concavità rivolta verso il basso per $x > 0$.
Si ha un punto fisso: $\alpha = 2$.

$x_0 < \alpha$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $\alpha \Rightarrow x_n \nearrow \alpha$.
$x_0 > \alpha$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$.
$x > 0:\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow g'(\alpha) = 0.25 \Rightarrow 1^o$ ordine.

7 settembre 2005 - n. 1
Grafico di g: Funzione (di tipo esponenziale) crescente con concavità rivolta verso il basso che interseca l'asse delle ordinate nel punto di ordinata $k - 1$, e con $g'(0) = 1$. Per $k > 1$ si hanno 2 punti fissi distinti $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$, per $k = 1$ si hanno due punti fissi coincidenti $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, per $k < 1$ non si hanno punti fissi.

Studio della convergenza per $k > 1$:
$x_0 < \alpha_1$: succ. monotona decrescente, illim. inf. $\Rightarrow x_n \searrow -\infty$.
$\alpha_1 < x_0 < \alpha_2$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $\alpha_2 \Rightarrow x_n \nearrow \alpha_2$.
$x_0 > \alpha_2$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha_2 \Rightarrow x_n \searrow \alpha_2$.
$g'(x) = e^{-x} \Rightarrow\ 0 < g'(\alpha_2) < 1$, essendo $\alpha_2 > 0 \Rightarrow 1^{\text{o}}$ ordine.

14 novembre 2005 - n. 1
Punti fissi : $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2},\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$.
$x_0 < \alpha_1$ o $x_0 > \alpha_3$: $x_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
$\alpha_1 < x_0 < \alpha_2$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha_1 \Rightarrow x_n \searrow \alpha_1$.
$\alpha_2 < x_0 < \alpha_3$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $\alpha_3 \Rightarrow x_n \nearrow \alpha_3$.
$g'(x) = \frac{\pi}{2}\cos x \Rightarrow g'(\alpha_1) = g'(\alpha_3) = 0$,
$g''(x) = -\frac{\pi}{2}\sin x \Rightarrow g''(\alpha_1) = -g''(\alpha_3) = \frac{\pi}{2}$, 2^{o} ordine.

23 gennaio 2006 - n. 1
$f \in C^2[1,2]$; $f(1) = e - e^2 \approx -4.671 < 0$, $f(2) = e^4 - e^2 \approx 47.209 > 0$, $f(1)f(2) < 0$;
$f'(x) = 2xe^{x^2} > 0$ in $[1,2]$; $f''(x) = 2e^{x^2}(1+2x^2) > 0$ in $[1,2]$;

$$\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| < 1; \left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right| < 1.$$

$x_2 = 1.65288,\ |x_2 - \alpha| = 0.2387$.

2 maggio 2006 - n. 2A
La funzione non ha altri punti fissi.
Sia $\alpha < 0$ tale che $g(\alpha) = 1$ ($\alpha = -\ln 1.5$):
$x_0 < \alpha \Rightarrow x_1 > 1$;
$\alpha < x_0 < 0 \Rightarrow 0 < x_1 < 1$;
$0 \le x_0 < 1 \Rightarrow$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $1 \Rightarrow x_n \nearrow 1$.
$x_0 > 1 \Rightarrow$: succ. monotona crescente, illim. sup. $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$.
$x > 0:\ g'(x) = x^2 \Rightarrow g'(1) = 1$, $0 < g'(x) < 1$ per $0 < x < 1\ \Rightarrow 1^{\text{o}}$ ordine.

2 maggio 2006 - n. 2B
La funzione non ha altri punti fissi.
Sia $\alpha > 0$ tale che $g(\alpha) = -1$ ($\alpha = \ln 1.5$):
$x_0 > \alpha \Rightarrow x_1 < -1$;
$0 < x_0 < \alpha \Rightarrow -1 < x_1 < 0$
$-1 < x_0 < 0$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da -1 $\Rightarrow x_n \searrow -1$.
$x_0 < -1$: succ. monotona decrescente, illim. inf. $\Rightarrow x_n \searrow -\infty$.
$x < 0:\ g'(x) = x^2 \Rightarrow g'(-1) = 1$, $0 < g'(x) < 1$ per $-1 < x < 0\ \Rightarrow 1^{\text{o}}$ ordine.

19 giugno 2006 - n. 3

3.1) Tre radici reali e distinte: $x = 0,\ x = \pm\sqrt{a}$, essendo $a > 0$.

3.2) $g(x) = x - \dfrac{x^3 - ax}{m},\ g'(x) = 1 - \dfrac{3x^2 - a}{m},\ g'(\sqrt{a}) = 1 - \dfrac{3a - a}{m} = 0\ \Rightarrow\ m = 2a.$

3.3) Grafico di g: Funzione sempre crescente; $g(0) = 0$ (tangente orizzontale); $x < 0$, concavità rivolta verso il basso, $x > 0$, concavità rivolta verso l'alto.
Si hanno tre punti fissi: $\alpha = -\sqrt{a},\ \beta = 0,\ \gamma = \sqrt{a}$.
$x_0 < \alpha$: succ. monotona decrescente, illim. inf. $\Rightarrow x_n \searrow -\infty$.
$\alpha < x_0 < \beta$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $\beta \Rightarrow x_n \nearrow \beta$.
$\beta < x_0 < \gamma$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\beta \Rightarrow x_n \searrow \beta$.
$x_0 > \gamma$: succ. monotona crescente, illim. sup. $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$.
$g'(x) = 3x^2/a,\ g''(x) = 6x/a,\ g'''(x) = 6/a\ \Rightarrow$
$g'(\beta) = g''(\beta) = 0,\ g'''(\beta) = 6/a \neq 0 \Rightarrow 3^o$ ordine.

19 giugno 2006 - n. 3

$\alpha = \sqrt[3]{21}$.

$(*)\ p = \dfrac{1}{21}\left(20p + \dfrac{21}{p^2}\right) \Leftrightarrow p^3 - 21 = 0\ (p \neq 0),\ g'(p) = \dfrac{20}{21} - \dfrac{2}{p^3},\ g'(\alpha) = \dfrac{6}{7} < 1.$

$(**)\ p = p - \dfrac{p^3 - 21}{3p^2} \Leftrightarrow p^3 - 21 = 0\ (p \neq 0),\ g'(p) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{14}{p^3},\ g'(\alpha) = 0.$

Grazie alla continuità di g', in entrambi i casi $g'(x) < 1$ anche in un intorno di α e dunque, per la condizione sufficiente, si ha convergenza .
$(*)$ 1^o ordine; $(**)$ 2^o ordine $[g''(p) = \frac{42}{p^4},\ g''(\alpha) \neq 0]$.

$f \in C^2[2,4];\ f(2) = -13,\ f(4) = 43,\ f(2)f(4) < 0;$
$f'(p) = 3p^2 > 0$ in $[2,4]$; $f''(p) = 6p > 0$ in $[2,4]$;

$\left|\dfrac{f(2)}{f'(2)}\right| = 13/12 < 2;\ \left|\dfrac{f(4)}{f'(4)}\right| = 43/48 < 2.$

7 settembre 2006 - n. 1

La funzione non ha altri punti fissi.
Grafico di g: Asintoto verticale: $x = 0$; asintoto obliquo per $x \to +\infty$: $y = \frac{2}{3}x$.
Crescente per $x < 0$, decrescente per $0 < x < \alpha$, crescente per $x > \alpha$; minimo: (α, α); concavità rivolta verso l'alto.

$x_0 < 0\ \wedge\ x_0 \neq -\sqrt[3]{1.5}$: $\exists \overline{n}$ tale che $x_{\overline{n}} > 0$.
$0 < x_0 < 1$: $x_1 > \alpha$.
$x_0 > \alpha$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$.
$g'(x) = \frac{2x^3 - 6}{3x^3} \Rightarrow g'(\alpha) = 0,\ g''(x) = \frac{6}{x^4} \Rightarrow 2^o$ ordine.

16 novembre 2006 - n. 1
Grafico di g: Funzione sempre crescente; $g(1) = 1$ (tangente orizzontale); $x < 1$, concavità rivolta verso il basso, $x > 1$, concavità rivolta verso l'alto.
Si hanno tre punti fissi: $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 2$.
$x_0 < \alpha$: succ. monotona decrescente, illim. inf. $\Rightarrow x_n \searrow -\infty$.
$\alpha < x_0 < \beta$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $\beta \Rightarrow x_n \nearrow \beta$.
$\beta < x_0 < \gamma$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\beta \Rightarrow x_n \searrow \beta$.
$x_0 > \gamma$: succ. monotona crescente, illim. sup. $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$.
$g'(x) = 3(x-1)^2\ \Rightarrow g'(\beta) = 0,\ g''(\beta) = 0\ g'''(\beta) = 6 \Rightarrow 3^{\text{o}}$ ordine.

15 febbraio 2007 - n. 2
Grafico di g: Funzione decrescente per $x < 0$, funzione crescente per $x > 0$; concavità rivolta verso l'alto.
Si hanno due punti fissi: $\alpha = 0,\ \beta = 1$.
$x_0 < -1/2,\ x_1 > \beta;\ -1/2 < x_0 < \alpha,\ \alpha < x_1 < \beta$.
$\alpha < x_0 < \beta$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$.
$x_0 > \beta$: succ. monotona crescente, illim. sup. $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$.
$x > 0:\ g'(x) = 2^x \ln 2\ \Rightarrow 0 < g'(\alpha) = \ln 2 < 1 \Rightarrow 1^{\text{o}}$ ordine.

18 giugno 2007 - n. 1
Punto fisso $\alpha = \sqrt[3]{15}$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 15}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{5}{x_n^2} \implies g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{x^2}$$

Grafico di g: Asintoto verticale: $x = 0$; asintoto obliquo per $x \to +\infty$: $y = \frac{2}{3}x$. Crescente per $x < 0$, decrescente per $0 < x < \alpha$, crescente per $x > \alpha$; minimo (α, α); concavità rivolta verso l'alto.

$0 < x_0 < \alpha$: $x_1 > \alpha$.
$x_0 > \alpha$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$.
$g'(x) = \frac{2x^3-30}{3x^3} \Rightarrow g'(\alpha) = 0,\ g''(x) = \frac{30}{x^4},\ g''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow 2^{\text{o}}$ ordine.

9 luglio 2007 - n. 2
Grafico di g: $x > 0$, funzione crescente, concavità rivolta verso l'alto.
Si hanno due punti fissi: $\alpha = 0,\ \beta \in [3, 4]$.
$x_0 < \alpha$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $\alpha \Rightarrow x_n \nearrow \alpha$.
$\alpha < x_0 < \beta$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$.
$x_0 > \beta$: succ. monotona crescente, illim. sup. $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$.
$g'(0) = 1/2\ \Rightarrow 1^{\text{o}}$ ordine.

17 settembre 2007 - n. 2

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{\frac{\alpha}{3}}}{\frac{\alpha}{3} x_n^{\frac{\alpha-3}{3}}} = \left(1 - \frac{3}{\alpha}\right) x_n; \quad g(x) = \left(1 - \frac{3}{\alpha}\right) x$$

$\alpha = 1,\ g(x) = -2x,\ |g'(x)| = 2 > 1 \Longrightarrow \forall x_0 \neq 0,\ |x_n| \to \infty.$
$\alpha = 2,\ g(x) = -\frac{1}{2}x,\ |g'(x)| = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \forall x_0 \neq 0,\ x_n \to 0$ (x_n: segni alterni).
$\alpha = 4,\ g(x) = \frac{1}{4}x,\ g'(x) = \frac{1}{4} < 1 \Longrightarrow \forall x_0 \neq 0,\ x_n \to 0$ (x_n: segno costante).

24 gennaio 2008 - n. 2
Si hanno due punti fissi: $\alpha = 1,\ \beta \in (3, 4)$.
$(*)$ $x_0 < \alpha$: dopo un numero finito di passi $x_n < 0 \Rightarrow x_n \notin$C.E.
$\alpha < x_0 < \beta$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $\beta \Rightarrow x_n \nearrow \beta$.
$x_0 > \beta$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\beta \Rightarrow x_n \searrow \beta$.
$g'(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow 0 < g'(\beta) < 1$, essendo $\beta \in (3, 4) \Rightarrow 1^{\text{o}}$ ordine.

$(**)$ $x_0 < \alpha$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $\alpha \Rightarrow x_n \nearrow \alpha$.
$\alpha < x_0 < \beta$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$.
$x_0 > \beta$: succ. monotona crescente, illim. sup. $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$.
$g'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x-1}{2}} \Rightarrow g'(\alpha) = 0.5 < 1 \Rightarrow 1^{\text{o}}$ ordine.

18 febbraio 2008 - n. 2
Grafico di g: funzione continua, con derivata prima continua
$(g'_{\pm}(0) = \frac{1}{3})$.
Si ha un punto fisso: $\alpha = 0$.
$x_0 < \alpha$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $\alpha \Rightarrow x_n \nearrow \alpha$.
$x_0 > \alpha$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$.
$g'(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow 1^{\text{o}}$ ordine.

15 luglio 2008 - n. 3
3.1) $f \in C^2[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]; f(\frac{\pi}{4}) = -0.79715 < 0, f(\frac{\pi}{2}) = 2.46740 > 0, f(\frac{\pi}{4})f(\frac{\pi}{2}) < 0;$
$f'(x) = 2x + 2\sin x > 0$ in $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$; $f''(x) = 2 + 2\cos x > 0$ in $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$;

$$\left|\frac{f(\frac{\pi}{4})}{f'(\frac{\pi}{4})}\right| < \frac{\pi}{4}; \left|\frac{f(\frac{\pi}{2})}{f'(\frac{\pi}{2})}\right| < \frac{\pi}{4}.$$

3.2) $\overline{k}$=7

9 settembre 2008 - n. 3
$f \in C^2[3, 4];\ f(3) = -1 < 0,\ f(4) = 2 > 0,\ f(3)f(4) < 0;$

$f'(x) = 2x - 4 > 0$ in $[3,4]$; $f''(x) = 2 > 0$ in $[3,4]$;

$$\Big|\frac{f(3)}{f'(3)}\Big| < 1; \ \Big|\frac{f(4)}{f'(4)}\Big| < 1.$$

$x_2 = 3.41666$, $|x_2 - \alpha| \approx |x_3 - x_2| = 0.00245098$; $|x_2 - \alpha| = 0.00245531$.

28 gennaio 2009 - n. 2
$f \in C^2[1,2]$; $f(1) = 1 > 0$, $f(2) = -2 - \log 2 \approx -2.693 < 0$, $f(1)f(2) < 0$;
$f'(x) = -2x - \frac{1}{x} < 0$ in $[1,2]$; $f''(x) = -2 + \frac{1}{x^2} < 0$ in $[1,2]$;
$f'(1) = -3$, $f'(2) = -4.5$.

$$\Big|\frac{f(1)}{f'(1)}\Big| < 1; \Big|\frac{f(2)}{f'(2)}\Big| < 1.$$

$x_0 = 1$, $x_1 = 1.3333$, $x_2 = 1.3142$.

17 febbraio 2009 - n. 2
$g(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$; punto fisso $\alpha = 2$.
$1 < x_0 < \alpha \Rightarrow x_1 > \alpha$;
$x_0 > \alpha \Rightarrow$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$.
$g'(\alpha) = 0$, $g''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow 2^o$ ordine.

13 luglio 2009 - n. 2
Metodo di Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n}(x_n - 2)}{e^{x_n}(x_n - 1)} = x_n - \frac{x_n - 2}{x_n - 1} \implies g(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Punto fisso $\alpha = 2$.

Grafico di g: Asintoto verticale: $x = 1$; asintoto obliquo per $x \to +\infty$: $y = x - 1$. Crescente per $x < 0$, decrescente per $0 < x < 1$, e per $1 < x < \alpha$, crescente per $x > \alpha$; massimo $(0, -2)$, minimo (α, α); concavità rivolta verso il basso per $x < 1$, concavità rivolta verso l'alto per $x > 1$.

$1 < x_0 < \alpha$: $x_1 > \alpha$.
$x_0 > \alpha$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$.
$g'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(\alpha) = 0$, $g''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$, $g''(\alpha) = 2 \neq 0 \Rightarrow 2^o$ ordine.

3 settembre 2009 - n. 2
Punti fissi $\alpha = -1$, $\beta = 1$.

Grafico di g: Asintoto verticale: $x = 0$; asintoto obliquo $y = \frac{1}{2}x$. Crescente per $x < \alpha$, decrescente per $\alpha < x < 0$, e per $0 < x < \beta$, crescente per $x > \beta$; massimo (α, α), minimo (β, β); concavità rivolta verso il basso per $x < 0$, concavità rivolta verso l'alto per $x > 0$.

$x_0 < \alpha$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $\alpha \Rightarrow x_n \nearrow \alpha$.
$\alpha < x_0 < 0$: $x_1 < \alpha$.
$0 < x_0 < \beta$: $x_1 > \beta$.
$x_0 > \beta$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\beta \Rightarrow x_n \searrow \beta$.
$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \Rightarrow g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$,
$g''(x) = \frac{1}{x^3}$, $g''(\alpha) = -g''(\beta) = -1 \neq 0 \Rightarrow 2^o$ ordine.

16 novembre 2009 - n. 2
Punto fisso $\alpha = \sqrt[3]{3}$.

Grafico di g: Asintoto verticale: $x = 0$; asintoto obliquo: $y = \frac{2}{3}x$. Crescente per $x < 0$, decrescente per $0 < x < \alpha$, crescente per $x > \alpha$; minimo (α, α); concavità rivolta verso l'alto.

$x_0 < 0 \ \wedge \ x_0 \neq -\sqrt[3]{3/2}$: $\exists \overline{n}$ tale che $x_{\overline{n}} > 0$.
$0 < x_0 < \alpha$: $x_1 > \alpha$.
$x_0 > \alpha$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$.
$g'(x) = \frac{2x^3-6}{3x^3} \Rightarrow g'(\alpha) = 0$, $g''(x) = \frac{6}{x^4}$, $g''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow 2^o$ ordine.

18 gennaio 2010 - n. 2
$N \geq 9$.

24 giugno 2011 - n. 1
$f \in C^2[1,2]$; $f(1) = -5$, $f(2) = 14$, $f(1)f(2) < 0$;
$f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$ in $[1,2]$; $f''(x) = 6x + 8 > 0$ in $[1,2]$;

$$\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| = \left|\frac{5}{11}\right| < 1; \left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right| = \left|\frac{14}{28}\right| < 1.$$

$x_2 = 1.36890$, $x_3 = 1.36524$, $|x_2 - \alpha| \approx |x_2 - x_3| \approx 0.00366....$

14 luglio 2011 - n. 1
1.1) Una radice reale $x = 0$ di molteplicità 5 per $k = 0$;

tre radici reali e distinte: $x = 0,\ x = \pm\sqrt[4]{k}$, per $k > 0$;
una radice reale $x = 0$ di molteplicità 1 per $k =< 0$.

1.2) $g(x) = x - \dfrac{x^5 - kx}{M}$, $g'(x) = 1 - \dfrac{5x^4 - k}{M}$, $g'(\sqrt[4]{k}) = 1 - \dfrac{5k - k}{M} = 0 \Rightarrow M = 4k$.

1.3) Grafico di g: Funzione sempre crescente; $g(0) = 0$ (tangente orizzontale);
$x < 0$, concavità rivolta verso il basso, $x > 0$, concavità rivolta verso l'alto.
Si hanno tre punti fissi: $\alpha = -\sqrt[4]{k},\ \beta = 0,\ \gamma = \sqrt[4]{k}$.
$x_0 < \alpha$: succ. monotona decrescente, illim. inf. $\Rightarrow x_n \searrow -\infty$.
$\alpha < x_0 < \beta$: succ. monotona crescente, lim. sup. da $\beta \Rightarrow x_n \nearrow \beta$.
$\beta < x_0 < \gamma$: succ. monotona decrescente, lim. inf. da $\beta \Rightarrow x_n \searrow \beta$.
$x_0 > \gamma$: succ. monotona crescente, illim. sup. $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$.

$$g'(x) = \frac{5x^4}{k},\ g''(x) = \frac{20x^3}{k},\ g'''(x)\frac{60x^2}{k},\ g^{(IV)}(x) = \frac{120x}{k},\ g^{(V)}(x) = \frac{120}{k} \Rightarrow$$

$$g'(\beta) = g''(\beta) = g'''(\beta) = g^{(IV)}(\beta) = 0,\ g^{(V)}(\beta) = \frac{120}{k} \neq 0 \Rightarrow 5^{\circ} \text{ ordine.}$$