SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULL'INTERPOLAZIONE E APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI E DATI

TEMI D'ESAME DEI CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA

26 aprile 2005 - n. 2
Tema A) $p_1(x) = x - 1/8;\ M_x = 1/2,\ M_y = 3/8.$
Tema B) $p_1(x) = 2x - 1/2;\ M_x = 1,\ M_y = 3/2.$

14 luglio 2005 - n. 2
$\mathbf{y} = \{1/6, 1/2, 1/3, 1/6\};\ p_1(x) = 61/210 + x/210;\ M_x = 1/4,\ M_y = 7/24.$

7 settembre 2005 - n. 2
2.1) $p(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{5}{6}x + 1.$
2.2) $|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{3!}|x(x - 0.5)(x - 1)| \cdot 6 \leq ....$
2.3) $\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x = \frac{25}{36} \approx 0.694444.$
Con la formula di Cavalieri Simpson si ottiene ovviamente lo stesso risultato:
$1/6[f(0) + 4f(0.5) + f(1)] = \frac{25}{36}.$
$I_{app} = 0.694444;\ I_{es} = 0.693147;\ err = 0.001297.$

14 novembre 2005 - n. 2
$s_1(x) = x - 1$, se $x \in [0, 1]$, $s_1(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, se $x \in [1, 3]$. Max_err$=\frac{1}{2}$.

23 gennaio 2006 - n. 2

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}(x+h) + \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2}x(x+h)$$

$f(\overline{x}) = -\frac{1}{8}f(x_0) + \frac{3}{4}f(x_1) + \frac{3}{8}f(x_2).$

15 febbraio 2006 - n. 5
$s_1(x) = x$, se $x \in [0, 1]$, $s_1(x) = 1$, se $x \in [1, 2]$, $s_1(x) = 1$, se $x \in [2, 3]$,
$s_1(x) = 2x - 5$, se $x \in [3, 4]$, $s_1(x) = -x + 7$, se $x \in [4, 5]$. $s_1(3.5) = 2.$

12 giugno 2006 - n. 2
$x_1 \neq 0 \ \wedge \ x_1 \neq \frac{1}{2}.$

12 giugno 2006 - n. 3
$n = 19.$

19 giugno 2006 - n. 2
2.1) $p_2(x) = 0 \cdot \frac{x(x-1)}{2} + 1 \cdot (-x^2+1) + 0 \cdot \frac{x(x+1)}{2} = 1 - x^2$.
2.2) $|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{3!}|(x+1)x(x-1)| \cdot 6 \leq ....$
2.3) $L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = 1$.

13 luglio 2006 - n. 2
$p_3(x) = \frac{4}{\pi}x - \frac{8}{\pi^2}x(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{16}{3\pi^3}x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)$.
$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!}|x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})| \cdot 2 \leq ....$

7 settembre 2006 - n. 2
$x_0 \neq x_2, \wedge x_1 \neq (x_0+x_2)/2$.

16 novembre 2006 - n. 2
2.1) $p_2(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$; 2.2)$r(x) = \frac{10}{13} + \frac{6}{13}x$.

23 gennaio 2007 - n. 1
1.1) $p(x) = \frac{1}{2}(2x-1)(x-2) + \frac{1}{2}(-\frac{4}{3})x(x-2) + \frac{1}{5}\frac{1}{6}x(2x-1) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 1$.
1.2) $1 - 1(x-0) + \frac{2}{5}x(x-\frac{1}{2}) =$idem.
1.3) $|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{3!}|x(x-\frac{1}{2})(x-2)| \cdot 48 \leq ....$

11 giugno 2007 - n. 1

1.a) $p_2(x) = \frac{1}{2}\ \frac{8x^2-10\pi x+3\pi^2}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2}\ (16x^2 - 16\pi x + 3\pi^2) + \frac{1}{2}\ \frac{8x^2-6\pi x+\pi^2}{\pi^2} =$

$... = -\frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{8}{\pi}x - 1$.
1.b) $|f(\frac{\pi}{3}) - p_2(\frac{\pi}{3})| = \frac{1}{36} \approx 0.02777$.
1.c) $|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{3!}|(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{4})| \cdot 4 \leq ...$

9 luglio 2007 - n. 1
1.a) $p(x) = \frac{x^2-5x+6}{2} - \frac{1}{2}(x^2-4x+3) + \frac{1}{6}(x^2-3x+2) = ... = \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{11}{6}$.
1.b) $|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{3!}|(x-1)(x-2)(x-3)| \cdot 6 \leq ...$
1.c) $|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{h^2}{8}\max_{\{1 \leq t \leq 3\}}|f''(t)| = 0.25$.

15 novembre 2007 - n. 2
$p(x) = a + (-1.5a + 2b - 0.5c)x + 0.5(c - 2b + a)x^2$.
2.1) $p'(x) = -1.5a + 2b - 0.5c + (c-2b+a)x;\ c - 2b + a = 0 \iff b = \frac{a+c}{2}$.

I tre punti sono allineati.
2.2) $a = 0,\ b = 1,\ c = 0,\ p(x) = 2x - x^2$.
$r(x) = -\frac{1}{3!}x(x-1)(x-2)(\frac{\pi}{2})^3\cos(\frac{\pi}{2}t_x),\ t_x \in (0,2)$.

9 settembre 2008 - n. 1
$s_-(1) = s_+(1) = 2;\ s'_-(1) = s'_+(1) = -0.5;\ s''_-(1) = s''_+(1) = -4.5$.
Si può verificare anche che la spline è naturale: $s''(0) = s''(2) = 0$.

17 febbraio 2009 - n. 3

3.1) $p(x) = q(x) = (x-1)^2$.

3.2) $|f(x) - p(x)| \leq \frac{\pi^3}{12}$; $|g(x) - q(x)| \leq 16$.

3.3) $r(x) = g(x)$, $|g(x) - r(x)| = 0, \forall x \in [0,2]$;
(unicità del polinomio di interpolazione di grado 4 rispetto a 5 punti distinti).

13 luglio 2009 - n. 5
$\overline{M} = 32$.

$$s_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ -\frac{2}{\pi}(x-\pi) & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \\ \frac{2}{\pi}(x-\pi) & \text{se } x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ -\frac{2}{\pi}(x-2\pi) & \text{se } x \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi] \end{cases}$$

3 settembre 2009 - n. 5

5.1)$-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}(e-1)\dfrac{x^2-2x}{3}+\dfrac{1}{2e}(e^2-1)\dfrac{x^2+x}{6}$;

5.2) $|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{3!}|(x+1)x(x+2)| \cdot \frac{1}{8}\frac{e+e^{-1}}{2} \leq ...$
5.3) $|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{h^2}{8}\max_{\{-1\leq t\leq 2\}}|\frac{1}{4}\sinh\frac{t}{2}| < 10^{-4} \Rightarrow M \geq 58$.

16 novembre 2009 - n. 5
$s_-(2) = s_+(2) = 4;\ s'_-(2) = s'_+(2) = 4;\ s''_-(2) = s''_+(2) = -2$.
Si può verificare che la spline non è naturale: $s''(1) = 4$.
$s'(1.5) = 4.25;\ s'(2.25) = 3.5625$.

18 gennaio 2010 - n. 5
Dati: $x_0 = 0,\ y_0 = 1;\ x_1 = 1,\ y_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 3,\ y_2 = -1.$
5.1) Calcolare i polinomi di interpolazione con la formula delle differenze divise:
$p_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x;\ p_2(x) = p_1(x) - \frac{1}{12}x(x-1) = \frac{1}{12}(-x^2 - 5x + 12).$
5.2) $\max_{x\in[0,3]} |f(x) - p_1(x)| \le \pi^2$, $\max_{x\in[0,3]} |f(x) - p_2(x)| \le \frac{\pi^3}{9}.$

28 aprile 2011 - n. 4
Dati: $x_0 = 0,\ y_0 = 1;\ x_1 = 2,\ y_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = 3,\ y_2 = -1.$
4.1) Calcolare i polinomi di interpolazione con la formula delle differenze divise:
$p_1(x) = 1 - \frac{3}{4}x;\ p_2(x) = p_1(x) + \frac{1}{12}x(x-2).$
4.2) Utilizzando per semplicità le maggiorazioni:
$|x(x-3)| \le 3^2,\ |x(x-2)(x-3)| \le 2\cdot 3^2,\ x \in [0,3],$
si ha: $\max_{x\in[0,3]} |f(x) - p_1(x)| \le \frac{\pi^2}{2}$; $\max_{x\in[0,3]} |f(x) - p_2(x)| \le \frac{\pi^3}{9}.$

24 giugno 2011 - n. 4
Dati: $x_0 = 0,\ y_0 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = 1,\ y_2 = \frac{1}{2}.$
4.1) Calcolare i polinomi di interpolazione con la formula delle differenze divise:
$p_2(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{6}x;$ $\max_{x\in[0,1]} |f(x) - p_2(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{36}.$

14 luglio 2011 - n. 4
$x_0 \ne 1.$