RISULTATI DEGLI ESERCIZI SUI SISTEMI LINEARI

TEMI D'ESAME DEI CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA

7 giugno 2005 - n. 2
Per il teorema di Gershgorin: $\frac{1}{n} \leq \lambda \leq 4 + \frac{1}{n}$, da cui $K_2(A) \leq 4n + 1$.

7 giugno 2005 - n. 4
4.1) $a^2 = b \;\Rightarrow$ Simmetria.
$a^2 = b \;\wedge\; ab < \frac{3}{2}$, cioè $a < \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow$D.P.
4.2) $\rho(B_{GS}) = \frac{2ab+1}{4}, \;\Rightarrow\; ab < \frac{3}{2}$.
Il numero di iterazioni necessarie per soddisfare il test è 20.

14 giugno 2005 - n. 2
Si può osservare facilmente che la matrice è diagonalmente dominante, oppure si calcola il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo GS e si osserva che è minore di 1, oppure si osserva che la matrice A è simmetrica con elementi positivi sulla diagonale e quindi si sfrutta la CNS di convergenza del metodo GS per una matrice D.P.

14 luglio 2005 - n. 5
5.1) $\rho(B_J) = \sqrt{\frac{a+1}{2a}}$; $\rho(B_{GS}) = \rho^2(B_J) = \frac{a+1}{2a}$; si ha convergenza in entrambi i casi per $a < 1$.
5.2) Il metodo GS ha velocità asintotica di convergenza pari al doppio di quella del metodo J (si veda la relazione sui raggi spettrali delle matrici di iterazione), perchè la matrice è tridiagonale.
5.3) Nel caso particolare $a = 3$, $\rho(B_J) = \frac{2}{3}$; per l'errore si ottiene la maggiorazione $(\frac{2}{3})^{10}$.

7 settembre 2005 - n. 3
3.1) $\rho(B_J) = \sqrt{|a^2 - 2a|} < 1$, se $0 \leq a < 1 + \sqrt{2}$; $\rho(B_{GS}) = a < 1$, se $0 \leq a < 1$.
3.2) Per $a = 0$, $\rho(B_J) = \rho(B_{GS}) = 0$; per $0 < a < 1$, $\rho(B_J) > \rho(B_{GS})$.

7 settembre 2005 - n. 4

4.1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$.

4.2) $\|A\|_\infty = 1 + a$. $\|A^{-1}\|_\infty = \{1$, se $a > 2$; $\frac{2}{a}$, se $|a| < 2\}$.
$K_\infty = \{(1 + a)$, se $a > 2$; $\frac{2}{a}(1 + a)$, se $|a| < 2\}$.

4.3) $a = 2$.

14 novembre 2005 - n. 3
3.1) $\rho(B_J) = \sqrt{|a-1|}$. 3.2) $\rho(B_{GS}) = |a-1|$; 3.3) $0 < a < 2$.

23 gennaio 2006 - n. 3
Per il teorema di Gershgorin: $1 \le \lambda \le 8 + a$, da cui $K_2(A) \le 8 + a$.

15 febbraio 2006 - n. 2

$$L_{i,i-1} = -\frac{i-1}{i},\ i = 2, ..., n;\quad U_{i,i} = \frac{i+1}{i},\ i = 1, ..., n.$$

2 maggio 2006 - n. 1A

$$K_1(A) = \frac{(2-\alpha)^2}{|\alpha+4|};\ \alpha = -2;\ \mathbf{x} = [\ 2\ \ 4\ ]^T,\ \overline{\mathbf{x}} = [\ 0\ \ 2\ ]^T.$$

2 maggio 2006 - n. 1B

$$K_\infty(A) = \frac{(2-\alpha)^2}{|\alpha+4|};\ \alpha = -2;\ \mathbf{x} = [\ 0\ 2\ ]^T,\ \overline{\mathbf{x}} = [\ 2\ 4\ ]^T.$$

12 giugno 2006 - n. 4
$B_\omega = (I+\omega D^{-1}L)^{-1}[(1-\omega)I-\omega D^{-1}U]$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $U = L^T$.

$$B_\omega = \begin{pmatrix} 1-\omega & \frac{1}{2}\omega \\ (1-\omega)\frac{1}{2}\omega & \left(\frac{1}{2}\omega\right)^2 + (1-\omega) \end{pmatrix},$$

$$\det B_\omega = (1-\omega)\left(\frac{1}{2}\omega\right)^2 + (1-\omega)^2 - (1-\omega)\left(\frac{1}{2}\omega\right)^2 = (1-\omega)^2 \text{ (c.v.d.).}$$

19 giugno 2006 - n. 1
1.1) $\|A\|_\infty = \max\{|\alpha|+2, 2|\alpha|+1\} = \{|\alpha|+2, \text{ se } |\alpha| \le 1;\ 2|\alpha|+1, \text{ se } |\alpha| \ge 1\}$.
È minima per $\alpha = 0$.
1.2) $\|B_J\|_\infty = 2|\alpha| < 1$, se $\alpha < \frac{1}{2}$. 1.3) $\det A = 4 - 4\alpha^2 = 0 \iff \alpha = \pm 1$.

13 luglio 2006 - n. 1
1.1) $\alpha > 0 \ \wedge\ -1 < \beta < 1$. 1.2-3) $|\beta| < 1$. Se $\alpha = \beta > 1$, $\|A\|_2 = \alpha + 1$.

16 novembre 2006 - n. 3

3.1) $\rho(B_J) = \sqrt{|\alpha^2 - 2\alpha|} < 1$, se $\alpha \in [0, 1 + \sqrt{2}) \cap \{\alpha \neq 1\}$.

$\rho(B_{GS}) = \alpha < 1$, se $\alpha \in [0, 1)$.

3.2) Per $0 < \alpha < 1$ il metodo GS converge più velocemente del metodo J.

23 gennaio 2007 - n. 2

2.1) $\alpha > 1$; 2.2) $|\alpha| > 2$; 2.3-4) $|\alpha| > 1$.

15 febbraio 2007 - n. 1

(a)-(b)-(c): $a > 1$.

18 giugno 2007 - n. 2

Per il teorema di Gershgorin: $2 - \frac{4}{n} \leq \lambda \leq 8 + \frac{4}{n}$, da cui $K_2(A) \leq \frac{8n+4}{2n-4}$.

$$B_J = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2n} & 0 & ... & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & ... & ... & \frac{2}{n} & 0 \end{pmatrix}, \quad \|B_J\|_\infty = \frac{2}{n} < 1, \ \ \text{vero nell'ipotesi } n \geq 3.$$

9 luglio 2007 - n. 3

$$3.1) \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 16 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 25 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 25 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 36 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 36 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 36 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 36 \end{pmatrix}.$$

3.2) $\|A\|_\infty = \frac{3n^2 - n}{2}$

$$3.3) \ B_J = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \frac{1}{n^2} & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{1}{n^2} & \frac{2}{n^2} & ... & 0 & \\ \frac{1}{n^2} & \frac{2}{n^2} & ... & \frac{n-1}{n^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \|B_J\|_\infty = \frac{n^2 - n}{2n^2} < 1, \ \ \text{vero } \forall n \geq 1.$$

17 settembre 2007 - n. 3

3.1-2) $|\beta| < 1$.

15 novembre 2007 - n. 3
3.1) $k \neq \pm\sqrt[4]{2}$. 3.2-3) $|k| > \sqrt[4]{2}$. 3.4) $R(B_J) = \frac{1}{4}(-\ln\frac{2}{k^4}) = \frac{1}{4}R(B_{GS})$.

24 gennaio 2008 - n. 3
3.1) $|\beta| \leq 2$

3.2) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\beta}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\frac{\alpha\beta}{2} \end{pmatrix}, \det A = \det L \det U = 4-\alpha\beta;\ \alpha\beta \neq 4.$

3.3) $|\alpha\beta| < 4$.

18 febbraio 2008 - n. 3
3.1) $\|A\|_\infty = 2 + 2|\alpha|$.

3.2)$B_J = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \frac{1}{2}\alpha & 0 & \frac{1}{2}\alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\|B_J\| = |\alpha| < 1$, se $-1 < \alpha < 1$.

3.3) $\alpha \neq \pm 1$.

15 luglio 2008 - n. 2
2.1) $\|A\|_1 = a^2 + 2|a| + 1;\ \|A\|_1 = 4,$ se $a = \pm 1$.

2.2) $B_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{2} & 0 & ... & 0 \\ -\frac{1}{2a} & 0 & \frac{a}{2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & -\frac{1}{2a} & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & ... & -\frac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix}$, $\|B_J\| = \dfrac{|a|}{2} + \dfrac{1}{2|a|} \geq 1,\ \forall\, a \neq 0.$

2.3) $\rho(B_J) = \frac{1}{\sqrt{2}}/;\ \rho(B_{GS}) = \frac{1}{2} = \rho^2(B_J)$.
$R(B_J) = -\ln(\frac{1}{\sqrt{2}});\ R(B_{GS}) = -\ln(\frac{1}{2}) = 2R(B_J)$.

9 settembre 2008 - n. 2
2.1) $\alpha \neq \frac{2}{3}$. 2.2) $\alpha > \frac{2}{3}$. 2.3) $|\alpha| > 2$. 2.4-5) $|\alpha| > \frac{2}{3}$.

28 gennaio 2009 - n. 1

2.1) $\alpha \neq -\frac{15}{2}$.

2.2) $B_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.3) $|\alpha| < 1$.

17 febbraio 2009 - n. 1

1.1) $a \neq \pm\frac{1}{2}$.

1.2) $|a| < \frac{1}{4}$.

1.3) $|a| < \frac{1}{2}$; $R(B_J) = -\ln 2|a|$; $R(B_{GS}) = -\ln 4a^2 = 2R(B_J)$.

1.4) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{16} \end{pmatrix}$.

13 luglio 2009 - n. 3

3.1) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3.2) $B_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ \frac{6}{13} & -\frac{8}{13} & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} |\lambda| \leq \frac{5}{3} \\ |\lambda| \leq \frac{7}{3} \\ |\lambda| \leq \frac{14}{13} \end{cases} \Longrightarrow \rho(B_J) \leq \dfrac{7}{3}$.

3.3) $C = \begin{pmatrix} 3+\alpha & -2 & -3 \\ -3 & 3+\alpha & 4 \\ 6 & -8 & -13+\alpha \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} |3+\alpha| > 5 \\ |3+\alpha| > 7 \\ |\alpha - 13| > 14 \end{cases} \Longrightarrow (\alpha < -10) \cup (\alpha > 27)$.

$\|C\|_1 = \max\{|3+\alpha|+9, |3+\alpha|+10, |\alpha-13|+7\} = \begin{cases} 20-\alpha & \text{se } \alpha \leq \frac{7}{2} \\ \alpha+13 & \text{se } \alpha \geq \frac{7}{2} \end{cases};$

$\|C\|_1 \geq 30 \;\Leftrightarrow\; (\alpha \leq -10) \;\cup\; (\alpha \geq 17)$.

3 settembre 2009 - n. 3

$\rho(B_J) = \sqrt[3]{|\alpha\beta\gamma|} < 1$, se $|\alpha\beta\gamma| < 1$; $\rho(B_{GS}) = \sqrt{|\alpha\beta\gamma|} < 1$, se $|\alpha\beta\gamma| < 1$; $R(B_{GS}) = \dfrac{3}{2}R(B_J)$.

16 novembre 2009 - n. 4

4.1) $a \neq 2$. 4.2) $\nexists a \in \mathbb{R}$. 4.3-4) $|a| > 2$.

18 gennaio 2010 - n. 3
3.1) $a > 1$; 3.2) $|a| > 2$;

3.3) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$.

$\|U\|_\infty = \max\{3,\ |a{-}1|\} = \begin{cases} 3 & \text{se } -2 < a < 4 \\ |a-1| & \text{se } a < -2 \ \cup a > 4 \end{cases}$

28 aprile 2011 - n. 1

1.1) $\det(A) = (a^2+1)^2 \neq 0\ \forall a \in \mathbb{R};\ $ 1.2)$|a| > 1,\ R(B_{GS}) = 2R(B_J)$;

1.3) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$, $\|L\|_\infty = \dfrac{3}{2}$, $\|U\|_\infty = 3$.

24 giugno 2011 - n. 2

$B = I{-}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$, $\|B\|_1 = \|B\|_\infty = \dfrac{3}{4} < 1$;

$\rho(B) = \sqrt[4]{\frac{3}{80}} < 1;\ \rho(B_{GS}) = \frac{3}{80};\ R(B_{GS}) = 4R(B)$.

14 luglio 2011 - n. 2

$B = I{-}A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\|B\|_1 = \|B\|_\infty = \dfrac{3}{4} < 1$;

$\rho(B) = \sqrt[4]{\frac{3}{80}} < 1;\ \rho(B_{GS}) = \sqrt[3]{\frac{3}{80}};\ R(B_{GS}) = \frac{4}{3}R(B)$.