Qualche esercizio di base sulle

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

A) Al variare del parametro reale α si consideri il problema di Cauchy

$$(P_\alpha) \qquad \begin{cases} xy'' = 2|y'| \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = \alpha \end{cases}$$

Si stabilisca per quali valori di α il problema (P_α) ammette soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.
In corrispondenza ai valori di α cosi' determinati, si individuino tutte le soluzioni su $\mathbb{R}$ di (P_α).

B) Sia assegnata l'equazione differenziale

$$(*) \qquad y' = x \operatorname{sen}^2 y .$$

(i) Dimostrare che tutte le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$, sono limitate e sono funzioni pari.

(ii) Tracciare un diagramma qualitativo della soluzione massimale del problema di Cauchy $\begin{cases} (*) \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

(iii) Stabilire se la soluzione di cui al punto precedente e' integrabile (in senso generalizzato) su $\mathbb{R}$.

C) Assegnata l'equazione differenziale

$$(*) \qquad y'' = y' + 2\sqrt{y'}\,\exp(x/2)$$

i) si determini la soluzione locale del problema di Cauchy
$(*)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

ii) si stabilisca se sia possibile prolungare a tutto $\mathbb{R}$ la soluzione di cui al punto precedente, e si discuta l'unicita' del prolungamento;

iii) si determinino tutte le soluzioni su $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy $(*)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

iv) si indichi almeno una coppia (α,β) di numeri reali tali che il problema ai limiti $(*)$, $y(0) = \alpha$, $y(1) = \beta$ non ammetta soluzione.

D) Si consideri l'equazione differenziale

$$(*) \qquad x' = x^8 - 1$$

Mostrare che, qualunque sia il dato iniziale in $\mathbb{R}^2$, esiste ed e' unica la relativa soluzione locale di (*).

Al variare del parametro reale α, si consideri quindi il problema di Cauchy $\begin{cases} (*) \\ x(0) = \alpha \end{cases}$ e sia φ_α la sua soluzione massimale. Per quali valori di α φ_α e' costante ?

Tracciare un diagramma qualitativo di φ_α nei tre casi $\alpha = -2$, $\alpha = 0$, $\alpha = 2$, precisando in particolare l'insieme di definizione, gli estremi inferiore e superiore, il verso della concavita' di φ_α.

Detto infine (a,b) l'intervallo di definizione di φ_2, stabilire se esiste un intorno sinistro di b su cui φ_2 e' integrabile (in senso improprio).

E) Al variare dei parametri reali α e β si consideri il problema di Cauchy

$$(P_{\alpha,\beta}) \qquad \begin{cases} x' = f_\alpha(x) \\ x(0) = \beta \end{cases}$$

dove $f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 5 \\ (25 - x^2)^\alpha & |x| < 5 \end{cases}$.

i) Mostrare che $(P_{1/4,2})$ ammette soluzione unica su tutto $\mathbb{R}$, studiare tale soluzione e tracciarne un diagramma qualitativo (è richiesto lo studio del verso della concavità).

ii) Al variare di α e β in $\mathbb{R}$, discutere esistenza e unicità della soluzione locale di $(P_{\alpha,\beta})$.

iii) Determinare esplicitamente la soluzione locale di $(P_{1,0})$.

F) Si consideri il problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} (x+1)y' = \dfrac{1-e^y}{e^y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) Determinare la soluzione locale y_α di $(*)$ al variare del parametro reale α;
b) determinare il più ampio intervallo in cui la soluzione y_α è prolungabile.

G) Al variare del parametro reale non negativo a, individuare tutte le soluzioni locali del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}\exp(x+\sqrt{y}) \\ y(0) = a \end{cases}$$

precisando, per ciascuna di esse, il massimo intervallo di prolungabilita`.

H) Si consideri, per $n = 2, 3, \ldots$, il problema di Cauchy

$$(P_n) \quad \begin{cases} y' + y = \dfrac{y^n}{n} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

a) Al variare di n, si determini la soluzione locale g_n di (P_n);
b) per ogni n, si indichi il massimo intervallo I_n su cui g_n è prolungabile;
c) si studi la convergenza puntuale di $\{g_n\}$ su $\cap_n I_n$.

I) Mostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 y^4 + x^2 + 1} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

ammette soluzione φ unica e definita su tutto R.
Individuare i punti estremanti di φ, precisandone la natura; mostrare quindi che esistono $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)$ e $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$ e determinarli.
N.B. Non e` richiesta e non e` necessaria la determinazione esplicita di φ.

J) Tracciare, fornendo le necessarie motivazioni, un diagramma qualitativo della soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(1 + y^2) + \operatorname{artg}(e^x) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

N.B. Non è richiesta la determinazione della soluzione.

K) Si consideri, al variare del parametro reale a, il problema di Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} y' = \dfrac{(e^y - 1)2x}{(x^2 + 1)e^y} \\ y(0) = a \end{cases}$$

a) Per $a = 0$, determinare la soluzione locale di $(*)$ e il suo piu' ampio intervallo di prolungabilita'.
b) Per $a = -1$, determinare la soluzione locale di $(*)$ e il suo piu' ampio intervallo di prolungabilita'.