Qualche esercizio assolutamente di base su

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI, SPAZI NORMATI

A) Sia X lo spazio vettoriale $C^\infty([0,1])$ dotato della norma dell'estremo superiore. Sia $T: X \to X$ la trasformazione cosi' definita

$$Tf = (1/2)f' \qquad f \in X.$$

T è una contrazione?

B) Determinare la funzione limite puntuale su $\mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = n \int_{x-1/n}^{x+1/n} \exp(-t^2)\, dt \qquad n = 1,2,3...$$

e mostrare che la convergenza è uniforme su $\mathbb{R}$.

C) Si consideri la successione di funzioni reali così definite

$$f_n(x) = \mathrm{artg}(x^n)$$

a) Determinare l'insieme di convergenza puntuale S e la fuzione limite f.
b) Verificare che la successione non converge uniformemente su S e stabilire su quali sottointervalli di S la successione converge uniformemente.

D) Determinare il dominio D della funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(\log^2 x + |\log x|)^n}{2^n n^5 + 1}.$$

Stabilire quindi se f e' integrabile su D e in quali punti di D f e' derivabile.

E) Mostrare che la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{\frac{x}{n^2}} - 1)$$

è definita e di classe C^∞ su $\mathbb{R}$.
Calcolare quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

F) Si consideri la successione di funzioni reali così definite

$$f_n(x) = n^2 \left(\exp(\frac{x^2}{n^2}) - 1 \right)$$

a) Determinare l'insieme di convergenza puntuale S e la fuzione limite f;
b) verificare che la successione non converge uniformemente su S e stabilire su quali sottointervalli di S la successione converge uniformemente.

G) Per $n \in \mathbf{N}$, si considerino le funzioni reali di variabile reale così definite

$$f_n(x) = \int_2^x \frac{dt}{t^n e^t \log t}$$

a) Verificare che l'insieme di definizione comune alle f_n è l'intervallo $(1, +\infty)$.
b) Verificare che la funzione

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$$

è di classe C^1 su $(1, +\infty)$.
c) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to 1^+$.
d) Dimostrare che $f(x)$ ammette limite finito per $x \to +\infty$.

H) Si consideri, per $n \in \mathbf{N}$, la successione di funzioni reali $f_n : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ così definite

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + nx)}{x^n + nx}$$

a) Determinare l'insieme $D \subseteq (0, +\infty)$ su cui $\{f_n\}$ converge puntualmente e la funzione limite.
b) Stabilire su quali sottointervalli contenuti in D la convergenza è uniforme.
c) Determinare l'insieme $E \subseteq D$ su cui $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente.
d) Dimostrare che la serie converge uniformemente su $[2, +\infty)$.