Esercizi stimolanti su argomenti in programma

1. Mostrare che non esiste alcuna successione di funzioni reali continue (su $\mathbb{R}$) puntualmente convergente alla funzione di Dirichlet. (Usufruire, qualora lo si ritenga utile, del seguente fondamentale risultato: *Se uno spazio metrico completo è esprimibile come unione numerabile di suoi sottoinsiemi chiusi, uno almeno di essi ha interno non vuoto.*)

2. La formula di Ascoli (ottenibile con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange) afferma che, in $\mathbb{R}^n$ euclideo, la distanza del punto $\underline{y} = (y_i)_{i=1}^n$ dall'iperpiano di equazione $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i - a_0 = 0$ è data da $\dfrac{|\sum_{i=1}^n a_i y_i - a_0|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$. Dopo aver osservato che $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ è la miglior costante di Lipschitz del funzionale lineare su $\mathbb{R}^n$ dato da $f(\underline{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i = \langle \underline{a}, \underline{x} \rangle$ $\;(\underline{x} = (x_i)_{i=1}^n,\ \underline{a} = (a_i)_{i=1}^n)$, usando un metodo diverso estendere la formula di Ascoli al contesto del generico spazio normato $(X, \|\cdot\|)$, assumendo che f sia un funzionale lineare continuo (non identicamente nullo) su $(X, \|\cdot\|)$ la cui miglior costante di Lipschitz sia $K(f)$. In altre parole, dimostrare che la distanza di $y \in X$ dal sottospazio affine chiuso (iperpiano) $f^{-1}(a_0)$ è data da $\dfrac{|f(y) - a_0|}{K(f)}$. (*Hint: ricordare che $K(f)$ coincide con l'estremo superiore di $|f|$ sulla bolla unitaria di $(X, \|\cdot\|)$.*)

3. *Se f è una funzione continua su $[0,1]$ tale che $\int_0^1 f(x)\, x^n\, dx = 0,\ n = 0, 1, 2, ...,$ alllora f è la funzione nulla.* Vero o falso?

4. *Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni equilimitate e Riemann-integrabili su $[0,1]$, allora la successione di Funzioni $\{F_n(x) = \int_0^x f_n\}$ contiene qualche sottosuccessione uniformemente convergente su $[0,1]$.* Vero o falso?

5. *Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni equicontinue puntualmente convergente su $[0,1]$, allora la convergenza è uniforme.* Vero o falso?

6. Determinare tutte le soluzioni $\big(x(t), y(t)\big)$ del sistema lineare di equazioni ordinarie scalari

$$\begin{cases} x' = -3x + 10y \\ y' = -3x + 8y \end{cases}.$$

7. Mostrare che il sistema lineare di equazioni ordinarie scalari

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = \log(1+x) - y \end{cases}$$

possiede almeno una soluzione $\big(x(t), y(t)\big)$ definita su tutto $\mathbb{R}$ e che tutte le sue soluzioni tali che $x(0) > 0$ e $y(0) > 0$ che siano definite su un intervallo illimitato sono limitate.

8. *La mappa T di $C^0([0,1])$ in sè definita da*

$$T(f) = f(x) + \int_0^1 \operatorname{artg}(xy)\, f(y)\, dy, \quad f \in C^0([0,1])$$

è iniettiva e suriettiva. Vero o falso?

9. Due significative caratterizzazioni degli spazi normati finito-dimensionali sono le seguenti:

A) Uno spazio normato è finito-dimensionale se e solo se ogni automappa continua della bolla unitaria chiusa ammette qualche punto fisso ("solo se" Brouwer 1910, "se" Klee 1955);

B) Uno spazio normato è finito-dimensionale se e solo se non esiste alcuna retrazione della bolla unitaria chiusa sulla sfera unitaria, cioè non esiste alcuna mappa continua della bolla unitaria sulla sfera unitaria che, ristretta alla sfera unitaria, sia l'identità.

La parte "solo se" può essere facilmente ottenuta con strumenti di topologia algebrica. Provate la parte "se" usando la parte "se" di *A)*.

10. Siano $a_i, \ i = 0, ..., n-1, \ n$ funzioni reali continue su un intervallo reale I. Mostrare che il determinante wronskiano $w(x)$ valutato in $x \in I$ di n soluzioni dell'equazione lineare di ordine n

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} + y^{(n)} = 0$$

soddisfa l'equazione del primo ordine

$$w' + a_{n-1}(x) w = 0 \ .$$

Confermare mediante questo risultato il fatto che tale wronskiano o è identicamente nullo su I o è sempre diverso da zero in I.

11. Per $n = 1, 2, ...$ sia $f_n : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x,y) = \frac{1}{x^{2n} + y^{4n} + nx^{6n}}$$

e, per $S \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, sia $M_n(S) = \sup \{f_n(x,y) : (x,y) \in S\}$. Stabilire per quali sottoinsiemi S di $\mathbb{R}^2$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(S)$ è convergente.

12. Sia Σ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ costituito dall'intersezione tra la superficie sferica unitaria centrata nell'origine e la superficie cilindrica di equazione $x^2 + y^2 = x$. Sia P il punto $(0,1,0)$. Determinare $\max \{d_2(P,Q) : Q \in \Sigma\}$ e $\min \{d_2(P,Q) : Q \in \Sigma\}$ dove d_2 denota la distanza euclidea.
(*Può essere comodo ridursi ad un problema di ottimizzazione in una variabile, parametrizzando opportunamente Σ.*)

13. Per una funzione reale continua f definita su [0,1] con grafico $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$, indichiamo con $l(\Gamma_f)$ la lunghezza di Γ_f, definita come l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali (finite) che interpolano Γ_f. Dopo aver mostrato che $l(\Gamma_f)$ può non essere finita, per ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se sia vera o falsa.

a) Se $\{f_n\}$ converge uniformemente alla funzione nulla, allora $l(\Gamma_{f_n})$ converge a 1.
b) Se $\{f_n\}$ converge puntualmente su [0,1] a una funzione f continua e $l(\Gamma_{f_n}) \leq 2$ per ogni n, allora anche $l(\Gamma_f) \leq 2$.

14. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente di classe $C^{(1)}$ tale che $f(0) = 0$. Mostrare che l'intervallo di definizione di ogni soluzione massimale dell'equazione differenziale $y' = f(y)$ è illimitato. Tale intervallo deve necessariamente essere tutto $\mathbb{R}$?

15. Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e $T : X \to X$ una mappa *contrattiva*, cioè tale che $d\big(T(x), T(y)\big) < d(x, y)$ ogni volta che $x \neq y$. Allora T ammette un (ovviamente unico) punto fisso a cui converge la T-orbita di qualunque punto di X.

16. Estendere il teorema di Brouwer (v.es. 9, A), affermazione "solo se") dalle bolle chiuse di $\mathbb{R}^n$ agli insiemi compatti convessi di $\mathbb{R}^n$.