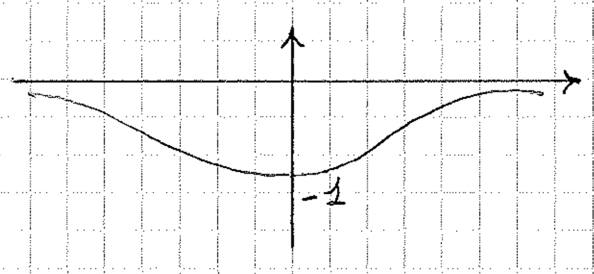
RISPOSTE AGLI ESERCIZI DI BASE SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

A) $\alpha \geq 0$; soluzioni $y_k(x) = \begin{cases} \alpha/3\, x^3 - \frac{\alpha}{3} + 1 & x \geq 0 \\ k x^3 - \frac{\alpha}{3} + 1 & x < 0 \end{cases}$ $\quad k \in [0, +\infty)$.

B) ii)



iii) Sì

C) i) $\tilde{y}(x) = e^x\big((x+1)^2 - 2(x+1) + 2\big) - 1 \qquad x > -1$.

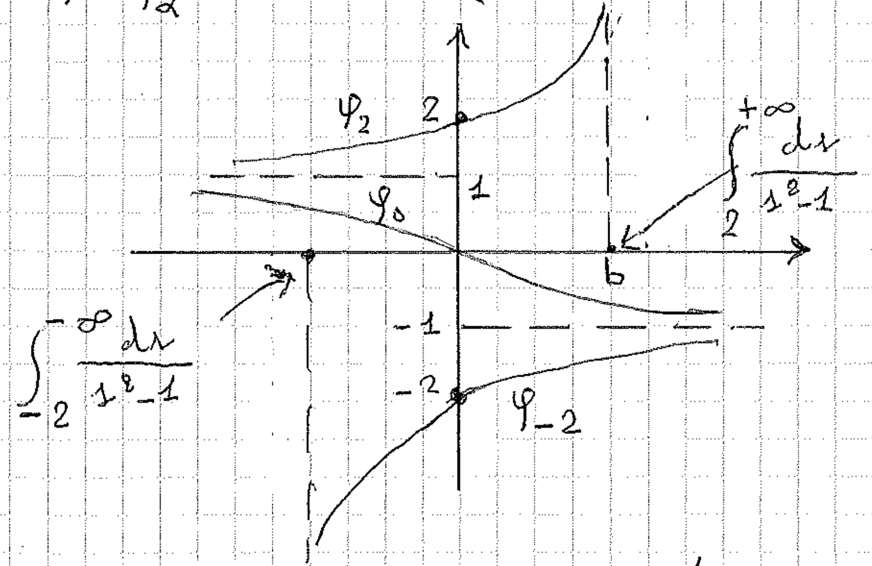
ii) Sì. Unico prolungamento $\varphi_1(x) = \begin{cases} 2/e - 1 & x \leq -1 \\ \tilde{y}(x) & x > -1 \end{cases}$.

iii) $y \equiv 2$, $\varphi_k(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -k \\ e^x\big((x+k)^2 - 2(x+k) + 2\big) & x > -k \end{cases}$

$k \in [-\infty, 0]$.

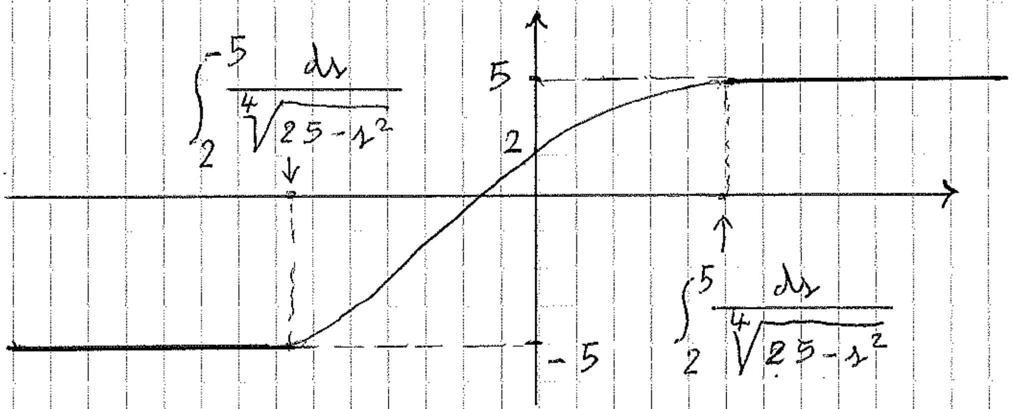
iv) Nessuno dei problemi ammette soluzione se $\alpha > \beta$.

D) φ_α è costante $\iff \alpha = 1 \vee \alpha = -1$.



φ_2 è integrabile (in senso improprio) su $(0, b)$.

E) i)



ii) La soluzione locale esiste unica se $\beta \neq \pm 5$, qualunque sia α, se $\beta = \pm 5$ nel caso $\alpha \notin (0,1)$, ma non nel caso $\alpha \in (0,1)$.

iii) $x(t) = 5\,\mathrm{Th}(5t)$.

F) a) $y_\alpha(x) = \log\left(1 + \frac{e^\alpha - 1}{1+x}\right)$.

b)
$\alpha < 0 \quad (-e^\alpha, +\infty)$
$\alpha = 0 \quad (-\infty, +\infty)$
$\alpha > 0 \quad (-1, +\infty)$.

G) $a = 0 \quad y \equiv 0$, oltre a quelle raccordabili come segue.

$a > 0 \quad y_a = \log^2\left(e^{-\sqrt{a}} - e^x + 1\right)$ per $x < \log\left(1 + e^{-\sqrt{a}}\right)$ prolungabile a meno infinito con la funzione nulla prima di $-\sqrt{a}$.

Per ogni $\alpha > 0$, la funzione nulla su $(-\infty, \alpha]$ può essere prolungata fino a $\log(1+e^\alpha)$ mediante raccordo con la funzione $\tilde{y}_\alpha = \log^2(1 - e^x + e^\alpha)$.

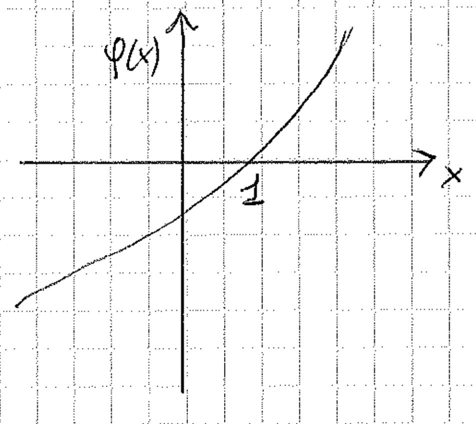
H) a) $$g_n(x) = \begin{cases} -\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{(n-1)x} + \frac{1}{n}\right\}^{\frac{1}{1-n}} & n \text{ dispari} \\ \left\{-\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{(n-1)x} + \frac{1}{n}\right\}^{\frac{1}{1-n}} & n \text{ pari} \end{cases}$$

b) $$I_n = \begin{cases} (-\infty, +\infty) & n \text{ dispari} \\ \left(-\frac{1}{n-1}\log(n+1), +\infty\right) & n \text{ pari} \end{cases}$$

c) Su $[0,+\infty)$, g_n tende puntualmente a $g(x) = -e^{-x}$.

I) -1 punto di massimo, 1 punto di minimo.
$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \pm\infty$.

J)



K) a) $y \equiv 0$ su $\mathbb{R}$

b) $y = \log\left(1-\left(1-\frac{1}{e}\right)(1+x^2)\right)$
su $\left(-\sqrt{\frac{1}{e-1}}, \sqrt{\frac{1}{e-1}}\right)$.