Sproloquio sul Teorema di James

Stefania D'Alessandro

12 dicembre 2007

Fino ad ora abbiamo constatato in maniera del tutto intuitiva che sussistono dei legami tra riflessività e realizzazione della norma da parte di ogni funzionale lineare continuo sullo spazio. Vediamo innanzitutto la definizione di **riflessività** : uno spazio di Banach X è riflessivo se è isometrico a X^{**}, dove l'isometria è data dalla mappa canonica

$$J\colon X \longrightarrow X^{**}$$

tale che

$$x \longmapsto x^{**}$$

e l'azione di x^{**} su X^* è la seguente:

$$x^{**}(f) = f(x) \quad (f \in X^*).$$

Abbiamo visto che l'applicazione x^{**} è ben definita, lineare e continua, poiché

$$\|x^{**}\| = \sup_{\|f\|=1} |x^{**}(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \sup_{\|f\|=1} \|x\|\|f\| \leq \|x\|. \tag{1}$$

Inoltre J è una isometria: infatti, per un corollario di Hahn-Banach

$$\forall x \in X \ \exists f \in S_{X^*} : f(x) = \|x\|$$

quindi la disuguaglianza ottenuta in (1) è in realtà una uguaglianza.

Qualche osservazione:

- J deve essere davvero J: la riflessività è una condizione più forte della semplice isometria con il secondo duale. Esistono spazi, tra cui ad esempio il celebre **spazio di James**, che sono isometrici al proprio secondo duale pur non essendo riflessivi. L'immagine canonica dello spazio di James è un iperpiano del suo secondo duale, quindi lo spazio non può essere riflessivo, tuttavia è isometrico al proprio secondo duale.

- Tutti gli elementi dell'immersione canonica di X in X^{**} realizzano la norma (per il corollario di Hahn-Banach).
- J non è sempre suriettiva (si pensi ad esempio a ℓ^1 e ℓ^∞).
- Eventuali funzionali su X^* che non realizzano la norma devono appartenere a $X^{**} \backslash J(X)$.
- Uno spazio normato non completo X non può essere riflessivo dato che $X^{**} = BL(X^*, \mathbb{R})$ è certamente completo (poiché lo è $\mathbb{R}$).

Richiamiamo ora una circostanza in cui abbiamo parlato di riflessività istituendo un legame con i funzionali che assumono la norma. Abbiamo accennato al fatto che valgano le seguenti implicazioni:

$$X^* \text{ “smooth” } (G\text{-smooth}) \implies X \text{ strictly convex}$$

e

$$X^* \text{ strictly convex} \implies X \text{ “smooth” } (G\text{-smooth}) .$$

Avevamo fatto qualche considerazione informale sul perché il viceversa possa non valere:[1] se ad esempio c'è un "punto angoloso" in S_{X^*}, significa che c'è tutto un segmento in $S_{X^{**}}$ corrispondente ad una famiglia di funzionali di supporto per il punto.[2] Detto $f \in S_{X^*}$ il "punto angoloso", allora esiste $S := [y^{**}, z^{**}] \subseteq S_{X^{**}}$ tale che

$$1 = x^{**}(f) = \sup_{\|g\|=1} |x^{**}(g)| \quad \forall x^{**} \in S. \tag{2}$$

Tuttavia non è detto che $x^{**} \in X$: può accadere che $x^{**} \in X^{**} \backslash J(X)$, perciò non è detto che il segmento S stia in X. Da (2) si può vedere che il fatto

[1] Chiaramente se lo spazio è riflessivo le implicazioni sono reversibili.

[2] Sia X uno spazio normato. Se V è un sottoinsieme di X, $x \in V$ è un punto di supporto per V se esiste $f \in X^*$ tale che $f(x) = \sup_{y \in V} f(y)$, mentre $f \in X^*$ è un funzionale di supporto per V se esiste $x \in V$ tale che $\sup_{y \in V} f(y) = f(x)$.

che il segmento possa non stare in X è legato alla realizzazione della norma da parte del funzionale f.

C'è un legame tra riflessività e funzionali che realizzano la norma: il **Teorema di James** dice esattamente questo.

Se $x \in X$

$$\|x\| = \max_{\|f\|=1} |f(x)|$$

e se $f \in X^*$

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Il Teorema di James dice che l'asimmetria che in qualche modo caratterizza lo spazio qualora quest'ultimo non sia riflessivo[3] equivale all'asimmetria di quella coppia di formule: per Hahn-Banach nella prima c'è sempre max, nella seconda il sup può non essere max; più precisamente, James dice che il sup è max se e solo se lo spazio è riflessivo.

Teorema (**James**)**.** *Uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se ogni $f \in X^*$ realizza la norma, cioè esiste $x \in X$ tale che $f(x) = \max_{\|y\|=1} |f(y)|$.*

Al di là della simmetria, ci sono delle motivazioni più profonde che stanno alla base dell'equivalenza. Il fatto che un funzionale lineare continuo non realizzi la norma è dovuto alla mancanza di compattezza sulle bolle (in uno spazio normato infinito-dimensionale un precompatto deve avere interno vuoto: in una pallina si riesce sempre a costruire una successione almeno 1-separata).

Vediamo alcune anticipazioni sulla costruzione di una topologia che permetterà, in situazioni privilegiate, di recuperare compattezza sulle bolle. Il Teorema di James fornisce una significativa caratterizzazione di queste situazioni di privilegio.

L'intento è di svuotare le bolle, in modo tale da avere speranze di recuperare la compattezza (la cui assenza permette il verificarsi di svariate anomalie). Introdurremo una topologia, la **topologia debole**, nella quale

[3] Uno spazio non riflessivo è "asimmetrico" nel senso che la dualità non è reversibile (dualizzando non si torna indietro) e non sono in generale reversibili le implicazioni che garantiscono che lo spazio erediti proprietà dal duale – ad esempio la separabilità: lo spazio eredita dal duale ma il duale non eredita dallo spazio.

gli aperti sono illimitati: tale topologia rende le bolle ottime candidate per essere compatte. La topologia debole, di Hausdorff e localmente convessa, è la topologia meno fine che renda continui gli elementi di X^*. Si ha

$$(X, w)^* = X^*.$$

Tale costruzione presenta anche degli svantaggi, tra i quali spiccano l'impossibilità di metrizzare (e quindi di normare) la topologia debole sull'intero spazio e la perdita di funzioni continue, tra cui la norma (che comunque rimane inferiormente semicontinua).

Vedremo, come conseguenza dei teoremi di (Tychonoff $\Longrightarrow$) Banach-Alaoglu e Goldstine, che X è riflessivo se e solo se B_X è debolmente compatta. A questo punto il Teorema di James può essere riformulato come segue:

Teorema (James). *Sia X uno spazio di Banach. Allora B_X è w-compatta se e solo se ogni funzionale lineare continuo realizza la norma.*

Così riformulato, il teorema diventa credibile non solo per ragioni di simmetria: vedremo che la topologia debole è la topologia generata dai moduli dei funzionali di X^*,[4] quindi sembra sensato che la topologia della bolla sia governata dal comportamento che i funzionali hanno su di essa (proprio perché è generata dalle seminorme corrispondenti ai loro moduli).

[4]Cioè un sistema fondamentale di intorni dell'origine è costituito dagli insiemi

$$V_{n,\varepsilon} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$$

con $\varepsilon > 0$ e $f_i \in X^*$ per ogni $i = 1, \dots n$.