Capitolo 1

Convergenza in spazi topologici

1.1 Insiemi diretti e Net

Sia X un insieme e $\preceq$ una relazione binaria su X. Diciamo che $\preceq$ *dirige* X, o che X *è diretto da* $\preceq$, se $\preceq$ ha le seguenti proprietà:

- Se $x \preceq y$ e $y \preceq z$ allora $x \preceq z$.
- $x \preceq x$ per ogni $x \in X$.
- Per ogni $x, y \in X$ esiste $z \in X$ tale che $x \preceq z$ e $y \preceq z$.

Un sottoinsieme $A \subset X$ diretto da $\preceq$ è *cofinale* in X se per ogni $x \in X$ esiste $a \in A$ tale che $x \preceq a$. È immediato verificare che un sottoinsieme cofinale di un insieme diretto è esso stesso un insieme diretto.

ESEMPIO 1.1.1. *Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. Sia $\mathfrak{U}(x)$ la famiglia degli intorni di x con la relazione $\preceq$, definendo $U \preceq V$ ogni volta che $U \supset V$. Allora $\mathfrak{U}(x)$ è un insieme diretto.*

Una *net* in un insieme X è una generica funzione da un insieme non vuoto Σ a X, dove Σ è diretto da $\preceq$ ed è detto *insieme degli indici.*

ESEMPIO 1.1.2. *Ogni successione è una net, che ha come insieme diretto $\mathbb{N}$ con l'ordinamento naturale.*

Una net $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ è *in* I se $x_\sigma \in I$ per ogni $\sigma \in \Sigma$; è *definitivamente* in I se esiste $\sigma_0 \in \Sigma$ tale che $x_\sigma \in I$ per ogni σ tale che $\sigma_0 \preceq \sigma$;è *frequentemente* in I se esiste un sottoinsieme cofinale $A \subset \Sigma$ tale che $S_{|A}$ è in I.

Una net $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ in uno spazio topologico (X, τ) *converge* a x (oppure x è un punto limite di S) se S è definitivamente in ogni τ-intorno di x.

ESEMPIO 1.1.3. *Consideriamo un intervallo* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *e una funzione* f *Riemann integrabile su* $[a, b]$. *Consideriamo l'insieme* Σ *delle partizioni di* $[a, b]$, *diretto dalla relazione* $\subset$. *Per ogni* $\sigma \in \Sigma$ *definiamo* $x_\sigma \in \mathbb{R}$ *la somma superiore calcolata sulla partizione* σ. *Allora la net* $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ *converge a* $\int_a^b f$.

Proposizione 1.1.4. *Siano* X *e* Y *spazi topologici, sia* $f : X \to Y$. *Allora* f *è continua se e solo se per ogni net* $\{x_\sigma\}$ *che converge a* $x \in X$ *la net* $\{f(x_\sigma)\}$ *converge a* $f(x)$.

Dimostrazione. Se f è continua e $\{x_\sigma\}$ converge a x, allora per ogni intorno V di $f(x)$ si ha che $\{f(x_\sigma)\}$ è definitivamente in $f(f^{-1}(V)) \subset V$. Viceversa, supponiamo che f non sia continua: sia V un intorno di $f(x)$ tale per cui non esiste alcun intorno U di x per il quale valga $f(U) \subset V$. Costruiamo una net $S = \{x_U, U \in \mathfrak{U}(x)\}$, dove $\mathfrak{U}(x)$ è diretto da $\supset$ e x_U è un punto di U tale che $f(x_U) \notin V$. Allora $\{x_U\}$ converge a x, ma $f(x) \notin \lim f(S)$. □

Corollario 1.1.5. *Se per due topologie su uno stesso insieme le stesse net hanno gli stessi punti limite, allora la mappa identità è un omeomorfismo fra i due spazi topologici.*

Proposizione 1.1.6. *Sia* A *un sottoinsieme di uno spazio topologico* X *e sia* $x \in X$. *Allora* $x \in \overline{A}$ *se e solo se esiste una net in* A *che converge a* x.

Dimostrazione. Se $x \in \overline{A}$ allora per ogni intorno U di x esiste un punto x_U di A appartenente a U. La net $\{x_U, U \in \mathfrak{U}(x)\}$ converge a x. Viceversa, se una net in A converge a x, ogni intorno di x contiene parte della net e quindi interseca A, quindi $x \in \overline{A}$. □

Corollario 1.1.7. *A è chiuso se e soltanto se contiene tutti i punti limite delle net i cui termini stanno in A.*

Un punto $x \in X$ è un *punto di accumulazione* della net S se S è frequentemente in ogni intorno di x.

Sia $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ una net in X, con Σ diretto da $\preceq$, sia Σ' un insieme diretto da $\leq$. Se esiste una funzione $\phi : \Sigma' \to \Sigma$ tale che:

- $\phi(\sigma'_1) \preceq \phi(\sigma'_2)$ ogni volta che $\sigma'_1 \leq \sigma'_2$ (in Σ')
- $\phi(\Sigma')$ è cofinale in Σ

allora la net $S' = \{x_{\phi(\sigma')}, \sigma' \in \Sigma'\}$ è chiamata *subnet* di S. Potevamo supporre che una naturale definizione di subnet fosse la restrizione di una net a un sottoinsieme cofinale dell'insieme degli indici. Si nota che questa definizione intuitiva genera in effetti solo subnet, ma sarebbe limitativa, in quanto, per esempio, implicherebbe che subnet di successioni siano sottosuccessioni. Nel seguente esempio mostreremo come le successioni possano avere subnet che non sono sottosuccessioni.

ESEMPIO 1.1.8. *Sia $\{x_n\}$ una successione. Consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ $[1, +\infty)$ con l'ordinamento naturale e sia $\phi : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione che associa a $r \in [1, +\infty)$ la sua parte intera. Allora $\{x_{\phi(r)}\}$ è una subnet di $\{x_n\}$. Mentre una sottosuccessione si può ottenere da una successione solo assottigliando l'insieme degli indici, abbiamo visto come una subnet si possa ottenere anche ampliando l'insieme degli indici. In questo caso si può notare come, viceversa, la successione $\{x_n\}$ possa essere vista in modo ovvio come una subnet di $\{x_{\phi(r)}\}$.*

Proposizione 1.1.9. *Un punto x in uno spazio topologico X è un punto di accumulazione di una net S se e solo se S ha una subnet che converge a x.*

Dimostrazione. Se S ha una subnet S' che converge a x allora x è un punto di accumulazione per S', dunque è un punto di accumulazione anche per S. Viceversa, sia x un punto di accumulazione di $S = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$. Consideriamo l'insieme Σ' costituito dalle coppie (σ, U) dove $\sigma \in \Sigma$, $U \in \mathfrak{U}(x)$ è un intorno di x tale che $x_\sigma \in U$. Diamo a Σ' una struttura di insieme diretto, dichiarando $(\sigma_1, U_1) \prec (\sigma_2, U_2)$ se $\sigma_1 \preceq \sigma_2$ e $U_1 \supset U_2$. La net $S' = \{x_{\sigma'}, \sigma' \in \Sigma'\}$, con $x_{\sigma'} = x_{(\sigma,U)} = x_\sigma$, è una subnet di S che converge a x. □

Corollario 1.1.10. *Un sottoinsieme A di uno spazio topologico è chiuso se e soltanto se contiene tutti i punti di accumulazione delle net i cui termini stanno in A.*

Proposizione 1.1.11. *Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni net in A ha un punto di accumulazione in A.*

Dimostrazione. Sia $\{x_\sigma\}$ una net in A che non ha punti di accumulazione in A. Consideriamo per ogni $a \in A$ un intorno aperto U_a che definitivamente non interseca la net. Sia $\mathfrak{U} = \{U_a, a \in A\}$ un ricoprimento aperto di A. $\mathfrak{U}$ non ammette alcun sottoricoprimento finito, perché escluderebbe la net da un certo termine in poi, quindi A non è compatto. Viceversa, se A ha un ricoprimento aperto $\mathfrak{U}$ che non ammette alcun sottoricoprimento finito, costruiamo $\mathfrak{U}'$ da $\mathfrak{U}$ aggiungendo le unioni finite dei suoi elementi. $\mathfrak{U}'$ è un insieme diretto dalla relazione $\subset$ e non ammette alcun sottoricoprimento finito. Per ogni $U' \in \mathfrak{U}'$ sia $x_{U'} \in A \setminus U'$. Allora $\{x_{U'}, U' \in \mathfrak{U}'\}$ è una net in A tale che se $U'_1 \subset U'_2$ allora $x_{U'_2} \notin U'_1$. Dunque $\{x_{U'}\}$ non ha punti di accumulazione in A. □

1.2 Successioni

Abbiamo introdotto il concetto di net per descrivere la topologia di uno spazio in termini di convergenza. Ci interessa ora individuare alcune classi di spazi in cui le successioni sono sufficienti a descrivere la topologia. Uno spazio soddisfa il primo assioma di numerabilità se ogni punto ammette un sistema di intorni numerabile. Uno spazio topologico X è chiamato *spazio sequenziale* quando un insieme $A \subset X$ è chiuso se e solo se contiene ogni limite delle successioni a valori in A che sono convergenti in X. Uno spazio topologico X è chiamato *spazio di Fréchet* se per ogni $A \subset X$ e per ogni $x \in \overline{A}$ esiste una successione $\{x_n\}$ di punti di A che converge a x. I seguenti esempi provano l'esistenza di spazi topologici che non sono di Fréchet.

ESEMPIO 1.2.1. *Sia A un insieme non numerabile. Sia $B = A \cup \{\infty\}$. Definiamo una topologia su B nel seguente modo: su A consideriamo la topologia discreta, dichiariamo che gli intorni di ∞ sono gli insiemi $U \subset B | \infty \in U$ e $B \setminus U$ è al più numerabile.*

Evidentemente $\infty \in \overline{B}$ perché $\{\infty\}$ non è un aperto, ma non esiste alcuna successione in B convergente a ∞, infatti supponiamo esista una tale successione. L'insieme C dei punti di tale successione è al più numerabile, dunque $A \setminus C$ è un intorno di ∞, nel quale non cadono punti della successione, che dunque non può convergere a ∞.

ESEMPIO 1.2.2. *Sia*

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$$

e sia $B = \mathbb{N} \times A \subset \mathbb{R}^2$. Sia $C = B \cup \{(n, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(\infty, 0)\}$ (vedi Figura **??***). Dotiamo C di una topologia τ nel modo seguente. $\tau_{|C \cap \mathbb{R}^2}$ sia la topologia euclidea (ristretta a $C \cap \mathbb{R}^2$) inoltre un sistema fondamentale $\mathfrak{U}$ di intorni di $(\infty, 0)$ sia definito nel modo seguente. Per ogni funzione $\phi : I \subset \mathbb{N} \to A$ chiamiamo* ipografo *di ϕ l'insieme*

$$\{(n, y) \in C : n \in I, y \leq \phi(n)\} :$$

la famiglia $\mathfrak{U}$ sia costituita dagli ipografi di tutte le possibili funzioni $\phi : [n, +\infty) \cap \mathbb{N} \to A$, con $n = 1, 2, \ldots$.

Chiaramente B è numerabile e il punto $(\infty, 0)$ sta nella chiusura di B, ma non esiste nessuna successione a valori in B che cada definitivamente in ogni intorno di $(\infty, 0)$. Tuttavia si noti che la successione dei punti $\{(n, 0)\}$, costituita da punti di accumulazione di B, converge al punto $(\infty, 0)$.

Teorema 1.2.3. *Ogni spazio che soddisfa il primo assioma di numerabilità è uno spazio di Fréchet; ogni spazio di Fréchet è uno spazio sequenziale.*

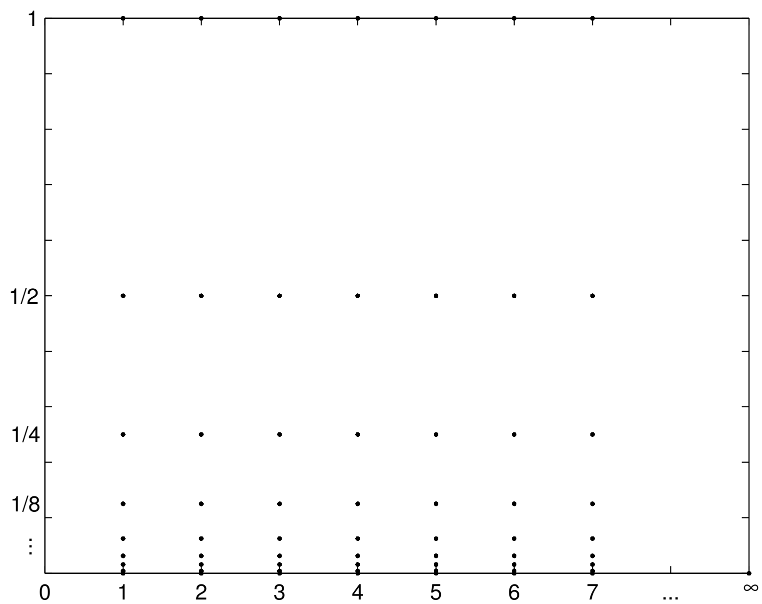

Figura 1.1: Rappresentazione dell'insieme C