COGNOME........................ NOME................... N. matricola..............

C.L. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1**
(proff. L. Vesely, C. Zanco)
14 settembre 2017 – versione **A**

1A. *(4 punti)* Per $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n = \left((-1)^n + \dfrac{\sin(n\pi/2)}{3n} \right)^n$. Allora

$\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n =$ .... ; $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n =$ ....

2A. *(6 punti)* Determinare, se esistono, tutte le terne $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ di numeri reali tali che la funzione

$$f(x) = e^x + \alpha \arctan x + \beta \arctan^2 x + \gamma \arctan^3 x$$

presenti un punto di minimo in $x = 0$.
Riportare qui sotto una <u>*breve*</u> *traccia dello svolgimento.*

3A. *(6 punti)* Per $n \in \mathbb{N}$ sia $A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \leq \log(x^n), \ x > 0\right\}$, e sia

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \,.$$

Allora, nello spazio metrico $\mathbb{R}^2$ con la metrica euclidea,

$\partial X =$ .... ,

$X' =$ .... ,

$X^\circ =$ ....

Sia ora (X, d) lo spazio metrico costituito dall'insieme X con la metrica euclidea. (X, d) è completo? *Giustificare solo questa risposta.*

4A. *(6 punti)* Al variare del parametro reale a, determinare il numero delle soluzioni reali dell'equazione $f(x) = a$, dove

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\log(2x)} \,.$$

Risposta:

5A. *(8 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale p la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (p^2-2)^n \left(\frac{n\,(1+n^{3/4})}{2n-3} \right)^p$$

converge assolutamente e per quali converge solo semplicemente.
Scrivere uno svolgimento.

Risposta finale. La serie converge:

- assolutamente se e solo se .... ;
- <u>solo</u> semplicemente se e solo se ....

6A. *(5 punti)* Sia f una funzione reale derivabile su $\mathbb{R}$ e siano

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}.$$

Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti affermazioni.

(a) *A è necessariamente chiuso.*

(b) *Se x_0 è un punto di accumulazione per A, allora x_0 è un punto di accumulazione per B.*

Soluzione: