COGNOME........................ NOME................... N. matricola..............

C.L. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1**
(proff. L. Vesely, C. Zanco)
22 giugno 2017 – versione **A**

1A. *(4 punti)* La classe limite dela successione

$$x_n = \frac{n^{n-2} + (2-n)^n}{4n^n - 3(n!)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

è l'insieme ....

2A. *(6 punti)* Determinare la chiusura dell'insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ 2\cos(1/x) \le y \le 3^{-x}\right\}$$

(a) nello spazio metrico $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ dotato della metrica euclidea

$\overline{A} =$ .... ;

(b) nello spazio metrico $\mathbb{R}^2$ dotato della metrica euclidea

$\overline{A} =$ ....

Sia ora B la proiezione ortogonale di A sull'asse delle y.

$\inf B =$ .... è minimo? ....; $\sup B =$ .... è massimo?.............

3A. *(6 punti)* Al variare del parametro reale non nullo α, la serie

$$\sum_{n=6}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{(5-n)\,(\alpha^n + \alpha^{-n})}$$

converge:

assolutamente se e solo se ....;

solo semplicemente se e solo se ....

4A. *(7 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale a il polinomio

$$P(x) = x^4 + ax + 1$$

ha almeno una radice reale nell'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$.
Riportare qui sotto una breve traccia dello svolgimento.
(Suggerimento: spesso è più facile lavorare con una sola funzione che con una famiglia di funzioni.)

5A. *(7 punti)* Determinare, se esistono, tre costanti reali a, b, c tali che per $x \to -\infty$ si abbia

$$\frac{\sqrt{x^2+x}}{x\left(e^{1/x}-1\right)} = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Riportare qui sotto uno svolgimento.

6A. *(6 punti)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari.

a) Mostrare che, se l'equazione $f(x) = 0$ ha un'infinità numerabile di soluzioni, esse non possono essere ordinate in una successione monotona.

b) Sia ora $f(x) = \cos(\log|x|) - 1 - \operatorname{tg}(\log|x|)$. Mostrare che l'equazione $f(x) = 0$ possiede un'infinità numerabile di soluzioni nell'intervallo (-1,1). Raccogliere informazioni su di esse sufficienti a rispondere alla seguente domanda: "Se $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ è un loro ordinamento, che cosa si può dire del carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?"