COGNOME........................ NOME.................... N. matricola...............

C.L. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (proff. L. Vesely, C. Zanco)
23 gennaio 2017 – versione **A**

☐ Seconda prova pre-esame a.a. 2016-2017 – solo quesiti 1,2,3,4,5 (durata 1h 45')
☐ Prova scritta d'esame globale (durata 2h 15')

(Per i quesiti con due punteggi, il primo è relativo alla prova pre-esame.)

1A. *(5 – 3 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale α l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{2\log x - 2x^2 + 7x + \alpha}$$

non è vuoto. Per tali valori, fornire qualche informazione rapidamente ottenibile su tale insieme di definizione.

Risposta:

2A. *(6 – 5 punti)* La funzione $f(x) = (2/x) + \log\sqrt{x}$ è invertibile su un opportuno intorno del punto $x = 1$. Detta $g(y)$ la sua funzione inversa a valore in tale intorno, calcolare

$$\lim_{y\to 2} \frac{g(y) - 1}{\log(y-1)}.$$

Riportare sinteticamente i passaggi eseguiti per ottenere il risultato.

3A. *(8 – 6 punti)* Al variare del parametro reale $a \neq -1$, stabilire se la seguente serie converge assolutamente, converge solo semplicemente o non converge:

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{(a+1)^n} \left(\sqrt[4]{n}\right)^{a-2} .$$

Risposta:

4A. *(8 – 6 punti)* Dimostrare o confutare.

a) In $\mathbb{R}$ dotato della metrica euclidea, sia D un generico insieme chiuso non vuoto. Esistono in $\mathbb{R}$ infiniti insiemi di cui D è il derivato.

b) Se una successione è regolare, ogni sua permutazione è regolare con lo stesso limite.

Soluzione:

5A. *(9 – 6 punti)* Calcolare, al variare del parametro reale a, il limite

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{3x+x^2} - \sin(3x + 12x^3) - 1 + ax^2}{\log(1 - 2x^3)},$$

riportando qui di seguito i calcoli eseguiti.

6A. *(5 punti)* Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \alpha\, x, \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \ |x| + |y| < 1\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = r\, x, \ r \in \mathbb{Q}\}$. Determinare, rispetto alla metrica euclidea di $\mathbb{R}^2$, l'interno, la chiusura e la chiusura dell'interno di $A \cup B$.

$(A \cup B)^\circ =$ ....

$\overline{A \cup B} =$ ....

$\overline{(A \cup B)^\circ} =$ ....

Sia ora $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ una successione divergente di numeri razionali e sia $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = r_n\, x\}$. Determinare, sempre rispetto alla metrica euclidea di $\mathbb{R}^2$, l'interno e la chiusura dell'insieme $E := A \cup \bigcup_{n=1}^\infty C_n$.

$E^\circ =$ ....

$\overline{E} =$ ....

7A. *(5 punti)* Determinare estremo inferiore e estremo superiore, specificando se siano rispettivamente minimo e massimo,

a) della successione $S := \{(n+1)^2/2^n\}_{n=0}^\infty$;

b) dell'insieme D dei numeri dell'intervallo (0,1) nella cui rappresentazione decimale compaiono solo le cifre 0 e 2 (scrivere i risultati sotto forma di frazione con numeratore e denominatore interi).

$\inf S =$ .... è minimo? ....; $\sup S =$ .... è massimo?............;

$\inf D =$ .... è minimo? ....; $\sup D =$ .... è massimo?.............
