COGNOME........................ NOME.................... N. matricola..............

C.L. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (proff. K. Payne, C. Zanco)
5 febbraio 2018

☐ Seconda prova pre-esame a.a. 2017-2018 – solo quesiti 3,4,5,6,7 (durata 2h)
☐ Prova scritta d'esame globale (durata 2h 30')
(Per i quesiti comuni alle due prove, il primo punteggio è relativo alla prova pre-esame.)

1. (*3 punti*) Assegnate le funzioni reali $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$, $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$ e $h(x) = \dfrac{1}{x}$, determinare $k(x) = h(g(f(x)))$ e il suo insieme di definizione.
(*Riportare i risultati senza giustificazione.*)

$k(x) =$ ....

il dominio di k è ....

2. (*7 punti*) Siano $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali; sia $\mathbb{R}^2$ dotato di un sistema cartesiano ortogonale Oxy e della metrica euclidea.

a) Dimostrare che per ogni $x > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\varepsilon > 0$, l'intervallo $(x - \varepsilon, x)$ contiene la potenza n-esima di qualche numero razionale.

b) Siano:
- $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$,
- $S_n = \{(q, y) \in \mathbb{R}^2 : q \in \mathbb{Q} \ \wedge \ |q|^n + |y|^n \leq 1\}$ al variare di $n = 2, 3, ...$,
- $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$.

Allora

$S =$ .... $S^\circ =$ ....

$\partial S =$ .... $\overline{S} =$ ....

(*Riportare sopra solo i risultati relativi alla domanda b), quindi svolgere la dimostrazione richiesta in a); per formulare le risposte a b), è possibile tenere conto dell'affermazione in a) anche senza averla dimostrata.*)

Dimostrazione di *a)*

3. (*6 punti*) (*4 punti*) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \sin x$. Verificare che f è invertibile e, detta g la funzione inversa di f, calcolare

$$\lim_{y \to 0} \frac{2g(y) - y}{y^2}.$$

- f è invertibile in quanto..

....

- il limite vale..............................(*Riportare il risultato del limite senza giustificazione.*)

4. (*8 punti*) (*6 punti*) Sia f la funzione reale definita per $x \neq 0$ da $f(x) = x^2(\log|x| - 2)$. Mostrare che f si può estendere con continuità ad una funzione di classe C^1 su tutta la retta reale. Tracciare poi un diagramma qualitativo di f in cui siano evidenziati e precisati eventuali estremanti locali, eventuali punti di flesso ed eventuali asintoti.
(*Motivare la possibilità dell'estensione riportando i calcoli; tracciare il diagramma con l'evidenziazione numerica dei dati richiesti, senza riportare i calcoli.*)

5. (*8 punti*) (*6 punti*) Determinare il carattere di ciascuna delle seguenti serie:

$a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{1/\sqrt{n}} \log\left(1+1/\sqrt{n}\right);\qquad b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(n!)^2}{n^2(2n)!};\qquad c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n\log n}{(n+1)^2}.$

(*Per ciascuna risposta riportare una giustificazione sintetica, ma esaustiva.*)

6. (*6 punti*) (*4 punti*) Indicare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f_\alpha(x) = \arctan\left(x + |x|^\alpha\right) \qquad x \neq 0$$

a) è prolungabile nell'origine con continuità;
b) è prolungabile nell'origine con derivabilità.
(*Riportare le risposte senza giustificazione.*)

a)..*b)*..

7. (*8 punti*) (*6 punti*) Per ciascuna delle seguenti affermazioni, stabilire se è vera o falsa giustificando ogni risposta data.

a) Se $\{a_n\}$ è una successione di numeri reali divergente, la successione $\{a_{n+1} - a_n\}$ non può tendere a 0.

b) La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1 + (-1)^n}{\sqrt{n}}$ ammette un riordinamento convergente.

c) Per ogni funzione reale f tale che $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$, si ha $\log\bigl(f(x)\bigr) = x + x^2/2 + x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$.